ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

COMPUTATIONAL MATHEMATICS

УДК 517.988; 519.65

К ТЕОРИИ ОПЕРАТОРНОГО ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ МАТРИЦ

М. В. ИГНАТЕНКО[1], ***Л. А. ЯНОВИЧ***[2]

[1]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*
[2]*Институт математики НАН Беларуси, ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Беларусь*

Рассматривается проблема построения и исследования определенных в пространствах прямоугольных матриц интерполяционных операторных многочленов произвольной фиксированной степени, которые являлись бы обобщениями соответствующих интерполяционных формул в случае квадратных матриц. Построены формулы линейной интерполяции различной структуры для прямоугольных матриц. Указаны матричные многочлены, относительно которых полученные интерполяционные формулы являются инвариантными. В качестве обобщения линейных формул построены формулы квадратичной интерполяции и интерполяции многочленами произвольной фиксированной степени в пространстве прямоугольных матриц. Рассмотрены частные случаи полученных формул, когда в качестве узлов выбираются квадратные матрицы либо когда значения интерполируемой функции являются квадратными матрицами, а также случай, когда выполняются оба эти условия. Для последнего варианта исследованы возможности различных и одинаковых порядков матриц для узлов и значений функции. Полученные результаты основаны на применении некоторых известных положений теории матриц и теории интерполирования скалярных функций. Изложение материала иллюстрируется рядом примеров.

Ключевые слова: псевдообратная матрица; скелетное разложение матрицы; функция от матрицы; матричный многочлен; операторное интерполирование.

Благодарность. Работа выполнена в рамках государственной программы научных исследований «Конвергенция-2025» (подпрограмма «Математические модели и методы», задание 1.3.01).

Образец цитирования:
Игнатенко МВ, Янович ЛА. К теории операторного интерполирования в пространствах прямоугольных матриц. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2022;3:91–106.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-3-91-106

For citation:
Ignatenko MV, Yanovich LA. On the theory of operator interpolation in spaces of rectangular matrixes. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2022;3:91–106. Russian.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-3-91-106

Авторы:
Марина Викторовна Игнатенко – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования механико-математического факультета.
Леонид Александрович Янович – член-корреспондент НАН Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор; главный научный сотрудник.

Authors:
Marina V. Ignatenko, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of web-technologies and computer simulation, faculty of mechanics and mathematics.
ignatenkomv@bsu.by
https://orcid.org/0000-0002-8029-1842
Leonid A. Yanovich, corresponding member of the National Academy of Sciences, doctor of science (physics and mathematics), full professor; chief researcher.
yanovich@im.bas-net.by

Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2022;3:91–106
Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. 2022;3:91–106

ON THE THEORY OF OPERATOR INTERPOLATION IN SPACES OF RECTANGULAR MATRIXES

M. V. IGNATENKO[a], ***L. A. YANOVICH***[b]

[a]*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*
[b]*Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus, 11 Surhanava Street, Minsk 220072, Belarus*

Corresponding author: M. V. Ignatenko (ignatenkomv@bsu.by)

The problem of constructing and studying interpolation operator polynomials of an arbitrary fixed degree, defined in spaces of rectangular matrices, which would be generalisations of the corresponding interpolation formulas in the case of square matrices, is considered. Linear interpolation formulas of various structures are constructed for rectangular matrices. Matrix polynomials, with respect to which the resulting interpolation formulas are invariant, are indicated. As a generalisation of linear formulas, formulas for quadratic interpolation and interpolation by polynomials of arbitrary fixed degree in the space of rectangular matrices are constructed. Particular cases of the obtained formulas are considered: when square matrices are chosen as nodes or when the values of the interpolated function are square matrices, as well as the case when both of these conditions are satisfied. For the last variant, the possibilities of different and identical matrix orders for nodes and function values are explored. The obtained results are based on the application of some well-known provisions of the theory of matrices and the theory of interpolation of scalar functions. The presentation of the material is illustrated by a number of examples.

Keywords: pseudo-inverse matrix; skeletal decomposition of a matrix; function of a matrix; matrix polynomial; operator interpolation.

Acknowledgements. This work was supported by the state program of scientific research «Convergence-2025» (subprogram «Mathematical models and methods», task 1.3.01).

Введение

Интерполирование функций – один из классических методов приближения функций, который находит широкое применение при построении численных методов решения различных классов задач, например при построении приближенных формул численного интегрирования и дифференцирования, построении приближенного решения интегральных уравнений и в других задачах.

Одним из способов обобщения задачи интерполирования функций является задача интерполирования функций от матриц. Основные вопросы, которые здесь возникают, – это разрешимость самой задачи, построение интерполяционных формул, изучение погрешности приближения и другие вопросы.

Широко известна интерполяционная формула Лагранжа – Сильвестра. Однако для ее построения необходимо знать собственные значения матрицы, которые являются аргументами функции. Причем как эта формула, так и некоторые другие известные формулы применяются для квадратных матриц.

Цель настоящей работы – построение формул интерполяции матричными многочленами в пространстве прямоугольных матриц, которые являлись бы обобщением соответствующих формул в случае квадратных матриц.

В данной статье указаны необходимые сведения из теории прямоугольных матриц: определение обобщенной обратной (псевдообратной) матрицы, понятие скелетного разложения матрицы, доказательство существования и единственности псевдообратной матрицы, описание схемы ее вычисления и применения для решения линейных алгебраических уравнений. Введено понятие матричных многочленов для квадратных матриц, рассмотрены их виды, а также представлены некоторые обобщения этих многочленов на пространство прямоугольных матриц.

Построены формулы линейной интерполяции различной структуры для прямоугольных матриц. Рассмотрены линейные интерполяционные многочлены трех видов. Для каждого вида указаны матричные многочлены, относительно которых линейные интерполяционные многочлены являются инвариантными.

В качестве обобщения линейных формул приведены формулы квадратичной интерполяции и интерполяции произвольной фиксированной степени в пространстве прямоугольных матриц. Рассмотрены частные случаи построенных формул, когда в качестве узлов выбираются квадратные матрицы либо когда значения интерполируемой функции являются квадратными матрицами, а также случай, когда выполняются оба эти условия. Для последнего варианта исследованы возможности различных и одинаковых матричных порядков для узлов и значений функции. Изложение материала иллюстрируется рядом примеров.

Предварительные сведения из теории обобщенных обратных матриц

Приведем общие сведения [1] о псевдообратных матрицах и некоторых их свойствах, а также выясним вопросы существования и единственности псевдообратной матрицы. Для этого рассмотрим матричное уравнение $AXA = A$, где A – заданная матрица порядка $m \times s$ (она может быть и квадратной), X – искомая матрица порядка $s \times m$.

Матрица A^+ порядка $s \times m$ называется псевдообратной для матрицы A порядка $m \times s$, если выполняются условия:

1) $AA^+A = A$;

2) $A^+ = UA^*$;

3) $A^+ = A^*V$, где A^* – матрица, эрмитово-сопряженная к матрице A, а U и V – некоторые квадратные матрицы порядков s и m соответственно.

Псевдообратную матрицу A^+ называют также матрицей Мура – Пенроуза.

Отметим, что если A – квадратная невырожденная матрица, то $A^+ = A^{-1}$. Действительно, в этом случае при замене A^+ на A^{-1} выполняются все три условия: $AA^{-1}A = IA = A$, $A^{-1} = UA^* = A^*V$, где $U = \left(A^*A\right)^{-1} = A^{-1}\left(A^*\right)^{-1}$, а $V = \left(AA^*\right)^{-1} = \left(A^*\right)^{-1}A^{-1}$. В силу единственности матрицы A^+ (это будет доказано ниже) следует, что $A^+ = A^{-1}$.

Покажем, что для любой матрицы A псевдообратная матрица A^+ существует и она единственна. Пусть матрица A имеет ранг r_A, очевидно, что $r_A \le m$ и $r_A \le s$. Тогда, как известно, матрицу A можно представить в виде

$$A = BC = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & \dots & b_{2r} \\ . & . & . \\ b_{m1} & \dots & b_{mr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1s} \\ c_{21} & \dots & c_{2s} \\ . & . & . \\ c_{r1} & \dots & c_{rs} \end{bmatrix}, \tag{1}$$

при этом $r_A = r_B = r_C$, т. е. матрицы B и C имеют тот же ранг, что и матрица A. Представление (1) называют скелетным разложением матрицы A. Очевидно, что оно не однозначно.

Поскольку B и C имеют максимально возможные ранги, то B^*B и CC^* обратимы, т. е. $\det B^*B \ne 0$, $\det CC^* \ne 0$. Покажем, что для псевдообратной матрицы A^+ имеет место равенство

$$A^+ = C^*\left(CC^*\right)^{-1}\left(B^*B\right)^{-1}B^*. \tag{2}$$

Используя формулу (2), проверим выполнение трех условий из определения матрицы A^+. Действительно,

$$AA^+A = BCC^*\left(CC^*\right)^{-1}\left(B^*B\right)^{-1}B^*BC = BC = A,$$

т. е. первое условие выполняется.

Построим матрицы U и V, для которых будут выполняться равенства $A^+ = UA^* = A^*V$. Пусть $K = \left(CC^*\right)^{-1}\left(B^*B\right)^{-1}$. Тогда $A^+ = C^*KB^* = C^*K\left(CC^*\right)^{-1}\left(CC^*\right)B^* = UC^*B^* = UA^*$, где $U = C^*K\left(CC^*\right)^{-1}C$. Аналогично $A^+ = C^*KB^* = C^*\left(B^*B\right)\left(B^*B\right)^{-1}KB^* = A^*V$, где $V = B\left(B^*B\right)^{-1}KB^*$.

Итак, для A^+, задаваемой равенством (2), выполняются все три условия, которыми определяется матрица Мура – Пенроуза, причем в условиях 2 и 3 матрицы U и V имеют вид $U = C^*K\left(CC^*\right)^{-1}C$ и $V = B\left(B^*B\right)^{-1}KB^*$ соответственно.

Покажем далее, что $A^+ = C^+B^+$, где C и B – матрицы из скелетного разложения матрицы A. Как уже отмечалось выше, псевдообратные матрицы B^+ и C^+ всегда существуют и для них имеют место равенства

$$BB^+B = B,\ B^+ = \tilde{U}B^*,\ B^+ = B^*\tilde{V};\ CC^+C = C,\ C^+ = \tilde{\tilde{U}}C^*,\ C^+ = C^*\tilde{\tilde{V}}.$$

Умножая равенство $B\tilde{U}B^*B = B$ слева на B^*, получим, что $B^*B\tilde{U}B^*B = B^*B$. Так как матрица B^*B обратима, то, умножая последнее равенство слева на $\left(B^*B\right)^{-1}$, получим соотношение $\tilde{U}B^*B = I$, которое, в свою очередь, после умножения справа на $\left(B^*B\right)^{-1}$ переходит в равенство $\tilde{U} = \left(B^*B\right)^{-1}$, т. е. $B^+ = \left(B^*B\right)^{-1}B^*$.

Аналогично находим C^+. Для этого используем равенство $CC^*\tilde{\tilde{V}}C = C$. Умножая его слева на C^*, получим $CC^*\tilde{\tilde{V}}CC^* = CC^*$, затем снова умножим его справа и слева на $\left(CC^*\right)^{-1}$ и получим, что $\tilde{\tilde{V}} = \left(CC^*\right)^{-1}$, т. е. $C^+ = C^*\left(CC^*\right)^{-1}$. Заменив в произведении C^+B^+ известные выражения для сомножителей, приходим к соотношению

$$C^+B^+ = C^*\left(CC^*\right)^{-1}\left(B^*B\right)^{-1}B^* = A^+.$$

Покажем, что построенная матрица A^+ для матрицы A единственна. Пусть для матрицы A существуют две псевдообратные матрицы A_1^+ и A_2^+, тогда

$$AA_1^+A = A = AA_2^+A,\ A_1^+ = U_1A^* = A^*V_1,\ A_2^+ = U_2A^* = A^*V_2.$$

Обозначим $D = A_2^+ - A_1^+$, $U = U_2 - U_1$, $V = V_2 - V_1$. Из предыдущих равенств следует, что $ADA = A\left(A_2^+ - A_1^+\right)A = 0$, $D = \left(U_2 - U_1\right)A^* = UA^*$, $D = A^*\left(V_2 - V_1\right) = A^*V$. Поскольку $\left(DA\right)^*DA = A^*D^*DA = A^* \times \left(V^*A\right)DA^* = A^*V^*\left(ADA\right) = 0$, то приходим к равенству $DA = 0$. Так как из равенств $AA^* = 0$ или $A^*A = 0$ для произвольных матриц A следует, что $A = 0$, то $DD^* = DAU^* = 0$. Это означает, что $D = 0$ и, следовательно, $A_1^+ = A_2^+$, т. е. для матрицы A существует единственная псевдообратная матрица A^+.

Пример 1. Построим псевдообратную матрицу A^+ для матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ранг матрицы A равен 2. Скелетное разложение $A = BC$, где B и C – матрицы ранга 2, определяется неоднозначно. Например, $A = BC$, где

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Далее применим формулу (2). Для матриц B и C имеем

$$BB^* = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix},\ \left(BB^*\right)^{-1} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},\ CC^* = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\ \left(CC^*\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

$$\left(CC^*\right)^{-1}\left(B^*B\right)^{-1} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$A^+ = C^*\left(CC^*\right)^{-1}\left(B^*B\right)^{-1}B^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Отметим, что, если $A = BC$ не является скелетным разложением, равенство $A^+ = C^+B^+$ не всегда имеет место.

Укажем также, что $AA^+A = A$ и, следовательно, $A^+AA^+ = A^+$.

Среди других свойств псевдообратных матриц отметим следующие:

1) $\left(A^*\right)^+ = \left(A^+\right)^*$;

2) $\left(A^+\right)^+ = A$;

3) $\left(AA^+\right)^* = AA^+$, $\left(A^+A\right)^* = A^+A$ (самосопряженность матриц AA^+ и A^+A);

4) $\left(AA^+\right)^2 = AA^+$, $\left(A^+A\right)^2 = A^+A$ (матрицы AA^+ и A^+A идемпотентны). Действительно, $\left(AA^+\right)^2 =$ $= AA^+AA^+ = AA^+$, $\left(A^+A\right)^2 = A^+AA^+A = A^+A$.

Заметим, что существуют различные методы вычисления псевдообратных матриц, один из которых – метод Гревиля, или метод последовательного нахождения псевдообратных матриц [1, с. 36].

Применение псевдообратных матриц к решению систем линейных алгебраических уравнений

Использование обратных матриц Мура – Пенроуза в матричном анализе и его различных приложениях описывается во многих книгах, в том числе и в монографии [2]. Рассмотрим их применение к решению систем линейных алгебраических уравнений

$$AX = C, \tag{3}$$

где A – матрица порядка $m \times s$; C – матрица порядка $m \times p$; X – искомая матрица порядка $s \times p$ [3–5]. Для того чтобы система (3) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}\left(A \middle| C\right)$, где $A|C$ – расширенная матрицей C матрица A. Это равенство равносильно условию $C = AV$, где V – некоторая матрица подходящего порядка.

Обозначим правое ядро матрицы A через $\Re\left(A\right) = \left\{N : AN = 0\right\}$. Решение системы $AX = C$ записывается в виде $X = A^+C + N$, где $N \in \Re\left(A\right)$. Действительно,

$$Ax = A\left(A^+C + N\right) = AA^+C + AN = AA^+AV = AV = C.$$

В качестве N всегда можно выбрать нулевую матрицу (в итоге получим одно из решений системы (3)) или взять $N = \left(I - A^+A\right)B$, где B – любая квадратная матрица порядка m.

Таким образом, общее решение однородной системы $AX = 0$ и неоднородной линейной алгебраической системы $AX = b$ задаются равенствами $X = \left(I - A^+A\right)q$ и $X = A^+b + \left(I - A^+A\right)q$ соответственно, где q – произвольный вектор подходящего порядка.

Для уравнений $AX = 0$ и $XA = 0$, где искомой переменной является матрица, общее решение X записывается в аналогичном виде: $X = \left(I - A^+A\right)Q$ и $X = Q\left(I - AA^+\right)$, где Q – произвольная матрица соответствующего порядка. В этом легко убедиться непосредственной подстановкой X в исходные уравнения.

Пример 2. Решим уравнение

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 5 & 9 & 5 \end{bmatrix}.$$

Для этого вычислим

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 5 & 9 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$X \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \end{bmatrix}, \ X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матричные многочлены и основные задачи теории операторного интерполирования

Пусть K_m – множество квадратных матриц порядка m, а оператор $F : K_m \to K_m$. В качестве точек множества K_m будем рассматривать матрицы A_0, A_1, …, A_n, X и соответствующие значения функции F от этих матриц: $F\left(A_0\right)$, $F\left(A_1\right)$, …, $F\left(A_n\right)$, $F\left(X\right)$.

Лагранжева задача интерполирования операторов состоит в следующем: для заданного оператора F и известной последовательности матриц $A_0, A_1, \ldots, A_n$ построить другой оператор $P_n : K_m \to K_m$ (например, матричный многочлен некоторой фиксированной степени) такой, что

$$P_n\left(A_k\right) = F\left(A_k\right) \ (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Кроме построения $P_n(X)$, в теории операторного интерполирования рассматриваются задачи исследования погрешности $r_n(X) = P_n(X) - F(X)$, где $r_n\left(A_k\right) = 0$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, и применения интерполяционных формул $F(X) \approx P_n(X)$ для разработки приближенных методов решения различных классов задач.

Матричные многочлены могут быть как с числовыми, так и с матричными коэффициентами. Матричный многочлен степени n с числовыми коэффициентами имеет вид

$$P_n(X) = a_0 I_m + a_1 X + \ldots + a_n X^n,$$

где a_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ – некоторые числа; I_m – единичная матрица порядка m, $X \in K_m$.

Матричным многочленом степени n с матричными коэффициентами называют матрицы одного из видов

$$P_n(X) = A_0 + A_1 X + \ldots + A_n X^n,\ Q_n(X) = B_0 + X B_1 + \ldots + X^n B_n,$$

где $A_k, B_k \in K_m$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ – заданные матрицы. Также рассматривают матричные многочлены

$$G_n(X) = P_n(X) + Q_n(X),\ P_n(X) = A_0 + \sum_{k=1}^{n} B_k X^k C_k,$$

где $A_0, B_k, C_k \in K_m$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ – некоторые заданные матрицы.

Если же оператор $F : K_{m,s} \to K_m$, где $K_{m,s}$ – множество прямоугольных матриц порядка $m \times s$, а K_m – множество квадратных матриц порядка m, то можно рассматривать матричный многочлен степени n с числовыми коэффициентами

$$P_n(X) = a_0 I + a_1 XC + \ldots + a_n (XC)^n,$$

где a_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ – некоторые числа; I – единичная матрица порядка m; $X \in K_{m,s}$; C – произвольная матрица порядка $s \times m$.

В случае когда оператор $F : K_{m,s} \to K_{p,q}$, где $K_{p,q}$ – множество прямоугольных матриц порядка $p \times q$, то один из вариантов матричных многочленов степени n с матричными коэффициентами рассматривается в виде

$$P_n(X) = M + A_1 XCB_1 + \ldots + A_n (XC)^n B_n,$$

где $X \in K_{m,s}$; M – заданная матрица порядка $p \times q$; A_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ – заданные матрицы порядка $p \times m$; B_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ – заданные матрицы порядка $m \times q$; C – некоторая матрица порядка $s \times m$.

Многочлены заданной структуры для линейной интерполяции в пространстве прямоугольных матриц

Обозначим через S_{lr} и S_{rl} матрицы порядков $l \times r$ и $r \times l$ соответственно ($l, r \in \mathbb{N}$; $r > l$), которые имеют вид

$$S_{lr} = \begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{matrix}}_{l} & \underbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{matrix}}_{r-l} \end{bmatrix} = \left[I_l O_{l,r-l} \right],\ S_{rl} = \begin{bmatrix} \left.\begin{matrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{matrix}\right\} l \\ \left.\begin{matrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{matrix}\right\} r-l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_l \\ O_{r-l,l} \end{bmatrix},$$

где I_l – единичная матрица порядка l; $O_{l,r-l}$ и $O_{r-l,l}$ – прямоугольные нулевые матрицы порядков $l \times (r - l)$ и $(r - l) \times l$ соответственно. Заметим, что для матриц S_{lr} и S_{rl} справедливы равенства $S_{lr} S_{rl} = I_l$,

$S_{lr}I_r = S_{lr}$ и $I_rS_{rl} = S_{rl}$, где I_r и I_l – единичные матрицы порядков r и l соответственно. При этом произведение $S_{rl}S_{lr} = \begin{bmatrix} I_l & O_{l\,r-l} \\ O_{r-l\,l} & O_{r-l\,r-l} \end{bmatrix} \neq I_r$.

Построим линейный интерполяционный многочлен вида $M_0XQ_0 + M_1XQ_1 + K$. Пусть M_i $(i = 0, 1)$, Q_i $(i = 0, 1)$ и K – матрицы порядков $p \times m$, $s \times q$ и $p \times q$ соответственно, A_0, A_1, $X \in K_{m,s}$ и определен оператор $F : K_{m,s} \to K_{p,q}$.

Теорема 1. *Матричный многочлен*

$$L_1(X) = F(A_0)C_0^+S_{lr}B^+(X - A_1)(A_0 - A_1)^+BS_{rl}B_0^+F(A_0) +$$
$$+ F(A_1)C_1^+S_{tr}B^+(X - A_0)(A_1 - A_0)^+BS_{rt}B_1^+F(A_1), \tag{4}$$

где $F(A_i) = B_iC_i$ $(i = 0, 1)$ *и* $A_0 - A_1 = BC$ *– скелетные разложения матриц* $F(A_0)$, $F(A_1)$, $A_0 - A_1$, *а* l, t, r *– их ранги соответственно, при условиях*

$$l \le r,\ t \le r \tag{5}$$

является линейным интерполяционным многочленом вида $M_0XQ_0 + M_1XQ_1 + K$ *для функции* $F(X)$, *и для него выполняются равенства*

$$L_1(A_i) = F(A_i)\ (i = 0, 1). \tag{6}$$

Многочлен $L_1(X)$ *вида (4) инвариантен относительно матричных многочленов нулевой степени, т. е. вида* $F(X) = K$, *где* K *– матрица порядка* $p \times q$, *при условии, что* $\operatorname{rank}(K) \le r$.

Доказательство. Очевидно, что $L_1(X)$ – линейный многочлен заданной структуры $M_0XQ_0 + M_1XQ_1 + K$. Проверим справедливость интерполяционных условий (6). Действительно,

$$L_1(A_0) = F(A_0)C_0^+S_{lr}B^+(A_0 - A_1)(A_0 - A_1)^+BS_{rl}B_0^+F(A_0) =$$
$$= F(A_0)C_0^+S_{lr}B^+BCC^+B^+BS_{rl}B_0^+F(A_0) = F(A_0)C_0^+S_{lr}I_rS_{rl}B_0^+F(A_0) =$$
$$= F(A_0)C_0^+I_lB_0^+F(A_0) = F(A_0)C_0^+B_0^+F(A_0) = F(A_0)F(A_0)^+F(A_0) = F(A_0),$$
$$L_1(A_1) = F(A_1)C_1^+S_{tr}B^+(A_1 - A_0)(A_1 - A_0)^+BS_{rt}B_1^+F(A_1) =$$
$$= F(A_1)C_1^+S_{tr}B^+BCC^+B^+BS_{rt}B_1^+F(A_1) = F(A_1)C_1^+S_{tr}I_tS_{rt}B_1^+F(A_1) =$$
$$= F(A_1)C_1^+B_1^+F(A_1) = F(A_1)F(A_1)^+F(A_1) = F(A_1).$$

Таким образом, матричный многочлен $L_1(X)$ вида (4) является линейным интерполяционным многочленом рассматриваемой структуры для функции $F(X)$.

Далее пусть $F(X) = K$, где K – матрица порядка $p \times q$, тогда $F(A_0) = F(A_1) = K = B_0C_0$ – скелетное разложение матрицы K, $l = \operatorname{rank}(K)$. Для рассматриваемой функции $F(X) = K$ вычислим

$$L_1(X) = KC_0^+S_{lr}B^+(X - A_1)(A_0 - A_1)^+BS_{rl}B_0^+K +$$
$$+KC_0^+S_{tr}B^+(X - A_0)(A_1 - A_0)^+BS_{rt}B_0^+K =$$
$$= KC_0^+S_{tr}B^+\big((X - A_1) - (X - A_0)\big)(A_0 - A_1)^+BS_{rt}B_0^+K =$$
$$= KC_0^+S_{tr}B^+(A_0 - A_1)(A_0 - A_1)^+BS_{rt}B_0^+K = KC_0^+S_{tr}B^+BCC^+B^+BS_{rt}B_0^+K =$$
$$= KC_0^+S_{tr}I_rS_{rt}B_0^+K = KC_0^+I_lB_0^+K = KC_0^+B_0^+K = KK^+K = K \equiv F(X).$$

Заметим, что условия (5) используются при построении $L_1(X)$ по правилу (4), в котором требуется переход от единичной матрицы I_r большего размера к единичным матрицам I_l, I_t меньшего размера, что достигается с помощью матриц S_{lr}, S_{rl}, S_{tr}, S_{rt}.

Пример 3. Пусть $m = 4$, $s = 5$, $p = 3$, $q = 2$,

$$F(X)=\begin{bmatrix}3&1&0&2\\0&2&1&1\\0&3&4&3\end{bmatrix}X\begin{bmatrix}1&3\\1&0\\3&2\\0&1\\4&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1\\1&0\\4&3\end{bmatrix}, \tag{7}$$

$$A_0=\begin{bmatrix}2&3&1&2&3\\0&1&0&0&2\\4&0&5&-1&2\\1&0&-1&-1&1\end{bmatrix},\ A_1=\begin{bmatrix}1&3&1&2&2\\0&0&0&0&1\\4&0&4&-1&1\\1&0&-1&-2&0\end{bmatrix}, \tag{8}$$

тогда $r=4$, $l=2$, $t=2$. Скелетные разложения имеют вид

$$F\left(A_0\right)=\begin{bmatrix}73&44\\48&28\\145&104\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}73&44\\48&28\\145&104\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=B_0C_0, \tag{9}$$

$$F\left(A_1\right)=\begin{bmatrix}45&27\\27&21\\90&83\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}45&27\\27&21\\90&83\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=B_1C_1, \tag{10}$$

$$A_0-A_1=\begin{bmatrix}1&0&0&0&1\\0&1&0&0&1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0&1\\0&1&0&0&1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}.$$

Далее $C_0=C_0^+$, $C_1=C_1^+$, $B=B^+$,

$$B_0^+=\frac{1}{8611}\begin{bmatrix}\dfrac{7759}{17}&\dfrac{6245}{17}&-292\\-\dfrac{43\,119}{68}&-\dfrac{17\,513}{34}&\dfrac{1959}{4}\end{bmatrix},\ B_1^+=\frac{1}{11\,561}\begin{bmatrix}\dfrac{12\,539}{18}&\dfrac{863}{6}&-263\\-761&-135&421\end{bmatrix},$$

$$\left(A_1-A_0\right)^+=C^+=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}4&-1&-1&-1\\-1&4&-1&-1\\-1&-1&4&-1\\-1&-1&-1&4\\1&1&1&1\end{bmatrix},\ S_{lr}=S_{tr}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix},\ S_{rl}=S_{rt}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\0&0\end{bmatrix}.$$

Таким образом, согласно формуле (4) с учетом представлений (7)–(10) имеем

$$L_1(X)=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-28&-17&0&0\\-21&-7&0&0\\-55&-21&0&0\end{bmatrix}X\begin{bmatrix}-4&1\\1&-4\\1&1\\1&1\\-1&-1\end{bmatrix}+\frac{1}{5}\begin{bmatrix}208&-162\\128&-112\\429&-156\end{bmatrix}. \tag{11}$$

Для формулы (11) справедливы интерполяционные условия (6).

Далее построим линейный интерполяционный многочлен вида $MXQ+K$. Пусть M, Q и K – матрицы порядков $p\times m$, $s\times q$ и $p\times q$ соответственно, а матрицы $A_0, A_1, X\in K_{m,\,s}$.

Теорема 2. *Матричный многочлен*

$$L_1(X) = F(A_0) + \left[F(A_1) - F(A_0)\right]C_0^+ S_{lr} B^+ (X - A_0)(A_1 - A_0)^+ BS_{rl} B_0^+ \left[F(A_1) - F(A_0)\right], \tag{12}$$

где $F(A_1) - F(A_0) = B_0 C_0$ *и* $A_1 - A_0 = BC$ *– скелетные разложения матриц* $F(A_1) - F(A_0)$ *и* $A_1 - A_0$ *соответственно, а* $l = \operatorname{rank}\left[F(A_1) - F(A_0)\right]$, $r = \operatorname{rank}\left[A_1 - A_0\right]$, *при условии, что* $l \le r$, *является линейным интерполяционным многочленом вида* $MXQ_0 + K$ *для функции* $F(X)$, *удовлетворяющим равенствам (6). Многочлен (12) инвариантен относительно полиномов нулевой степени, т. е. вида* $F(X) = K$, *где* K *– матрица порядка* $p \times q$.

Доказательство. Очевидно, что $L_1(X)$ является линейным многочленом заданной структуры $MXQ_0 + K$ и $L_1(A_0) = F(A_0)$. Покажем, что имеет место второе равенство из интерполяционных условий (6). Поскольку

$$L_1(A_1) = F(A_0) + \left[F(A_1) - F(A_0)\right]C_0^+ S_{lr} B^+ (A_1 - A_0)(A_1 - A_0)^+ BS_{rl} B_0^+ \left[F(A_1) - F(A_0)\right] =$$

$$= F(A_0) + \left[F(A_1) - F(A_0)\right]C_0^+ S_{lr} B^+ BCC^+ B^+ BS_{rl} B_0^+ \left[F(A_1) - F(A_0)\right] =$$

$$= F(A_0) + \left[F(A_1) - F(A_0)\right]C_0^+ I_l B_0^+ \left[F(A_1) - F(A_0)\right] =$$

$$= F(A_0) + \left[F(A_1) - F(A_0)\right]\left[F(A_1) - F(A_0)\right]^+ \left[F(A_1) - F(A_0)\right] = F(A_1),$$

то матричный многочлен $L_1(X)$ вида (12) является интерполяционным многочленом для функции $F(X)$.

Далее если функция $F(X) = K$, где K – матрица порядка $p \times q$, то $F(A_1) - F(A_0) = 0$ и очевидно, что $L_1(X) = K \equiv F(X)$.

Заметим, что и здесь при построении $L_1(X)$ по формуле (12) используется необходимое условие $l \le r$ для перехода от единичной матрицы I_r большего размера к единичной матрице I_l меньшего размера с помощью матриц S_{lr} и S_{rl}.

Далее построим линейный интерполяционный многочлен вида $XQ + K$. Отметим, что уравнение $AX = C$, где A – матрица порядка $m \times s$, X – столбец порядка s, а C – столбец порядка m, имеет решение тогда и только тогда, когда расширенная матрица $\left[A|C\right]$ порядка $m \times (s+1)$ имеет ранг, равный рангу матрицы A, т. е. столбец C принадлежит пространству столбцов матрицы A. Действительно, если X – решение уравнения $AX = C$, то C – линейная комбинация столбцов матрицы A. Следовательно, ранг матрицы $\left[A|C\right]$ равен рангу матрицы A. Наоборот, если $\operatorname{rank}\left[A|C\right] = \operatorname{rank} A$, то C – линейная комбинация столбцов матрицы A и коэффициенты этой комбинации дадут решение X уравнения $AX = C$.

Пусть Q и K – матрицы порядков $s \times q$ и $m \times q$ соответственно, матрицы $A_0, A_1, X \in K_{m,s}$, а оператор $F : K_{m,s} \to K_{m,q}$. Через $\Re(A)$ обозначим правое ядро матрицы $A \in K_{m,s}$, т. е. $\Re(A) = \left\{Y : Y \in K_{s,q},\ AY = 0\right\}$.

Для того чтобы многочлен $L_1(X) = XQ + K$ являлся интерполяционным многочленом для функции $F(X)$ относительно узлов A_0, A_1, необходимо выполнение следующих условий:

$$A_0 Q + K = F(A_0),\ A_1 Q + K = F(A_1).$$

Это система двух матричных уравнений, где A_0, A_1, $F(A_0)$, $F(A_1)$ – заданные матрицы, а Q и K – искомые. Отняв из второго уравнения первое, получим $(A_1 - A_0)Q = F(A_1) - F(A_0)$ – уравнение относительно Q. Таким образом, необходимо найти все решения Z уравнения

$$(A_1 - A_0)Z = F(A_1) - F(A_0). \tag{13}$$

Как обобщение отмеченного ранее, решение этого уравнения существует тогда и только тогда, когда столбцы матрицы $F(A_1) - F(A_0)$ принадлежат пространству столбцов матрицы $A_1 - A_0$. Решение $Z_0 = (A_1 - A_0)^+ \left(F(A_1) - F(A_0)\right)$ является частным решением уравнения (13), а все его решения имеют вид $Z=\left(A_1-A_0\right)^{+}\left(F\left(A_1\right)-F\left(A_0\right)\right)+M$, где $\left(A_1-A_0\right)^{+}M=O_{m,\,q}$ – нулевая матрица порядка $m\times q$. Следовательно, $K=F\left(A_0\right)-A_0Q$ и справедливо равенство

$$L_1(X)=XQ+F\left(A_0\right)-A_0Q=\left(X-A_0\right)Q+F\left(A_0\right)=$$

$$=\left(X-A_0\right)\left[\left(A_1-A_0\right)^{+}\left(F\left(A_1\right)-F\left(A_0\right)\right)+M\right]+F\left(A_0\right).$$

Теорема 3. *Матричный многочлен*

$$L_1(M,\,X)=\left(X-A_0\right)\left[\left(A_1-A_0\right)^{+}\left(F\left(A_1\right)-F\left(A_0\right)\right)+M\right]+F\left(A_0\right), \tag{14}$$

где $M\in\Re\left(A_1-A_0\right)$, *при условии, что* $\operatorname{rank}\left[A_1-A_0\right]=\operatorname{rank}\left[A_1-A_0\middle|F\left(A_1\right)-F\left(A_0\right)\right]$, *является линейным интерполяционным многочленом вида* $XQ+K$ *для функции* $F(X)$, *т. е. для него справедливы равенства (6). Любой фиксированный линейный интерполяционный многочлен* $L_1(M,\,X)$ *вида (14) инвариантен относительно матричных многочленов вида* $F(X)=XQ+K$, *если* K *– матрица порядка* $p\times q$, *а матрица* Q *порядка* $s\times q$ *– элемент множества* $\left\{Q:Q=G+M,\ G\in B\left(A_1-A_0\right)\right\}$, *где* $B(A)$ *– совокупность всех матриц порядка* $s\times q$, *каждый столбец которых принадлежит пространству столбцов матрицы* A^{+}; $M\in\Re\left(A_1-A_0\right)$.

Доказательство. Очевидно, что $L_1(X)$ является линейным многочленом заданной структуры $XQ+K$ и верно соотношение $L_1\left(A_0\right)=F\left(A_0\right)$. Покажем справедливость второго равенства из интерполяционных условий (6). Действительно,

$$L_1\left(M,\,A_1\right)=\left(A_1-A_0\right)\left[\left(A_1-A_0\right)^{+}\left(F\left(A_1\right)-F\left(A_0\right)\right)+M\right]+F\left(A_0\right)=$$

$$=\left(A_1-A_0\right)\left(A_1-A_0\right)^{+}\left(F\left(A_1\right)-F\left(A_0\right)\right)+\left(A_1-A_0\right)M+F\left(A_0\right)=$$

$$=\left(F\left(A_1\right)-F\left(A_0\right)\right)+F\left(A_0\right)=F\left(A_1\right).$$

Итак, матричный многочлен $L_1(X)$, заданный формулой (14), является интерполяционным многочленом для функции $F(X)$.

Если $F(X)=XQ+K$, то $F\left(A_i\right)=A_iQ+K$ ($i=0,\,1$) и справедливо тождество

$$L_1(M,\,X)=\left(X-A_0\right)\left[\left(A_1-A_0\right)^{+}\left(A_1-A_0\right)Q+M\right]+A_0Q+K=$$

$$=\left(X-A_0\right)\left[\left(A_1-A_0\right)^{+}\left(A_1-A_0\right)G+\left(A_1-A_0\right)^{+}\left(A_1-A_0\right)M+M\right]+A_0Q+K=$$

$$=\left(X-A_0\right)\left[G+M\right]+A_0Q+K=\left(X-A_0\right)Q+A_0Q+K=XQ+K\equiv F(X).$$

Формулы квадратичной интерполяции в пространстве прямоугольных матриц

Пусть

$$\left(A_0-A_1\right)\left(A_0-A_1\right)^{+}\left(A_0-A_2\right)\left(A_0-A_1\right)^{+}=B_0C_0,$$

$$\left(A_1-A_0\right)\left(A_1-A_0\right)^{+}\left(A_1-A_2\right)\left(A_1-A_2\right)^{+}=B_1C_1,$$

$$\left(A_2-A_0\right)\left(A_2-A_0\right)^{+}\left(A_2-A_1\right)\left(A_2-A_1\right)^{+}=B_2C_2$$

– скелетные разложения, а r_i – ранги матриц $\prod\limits_{\substack{k=0,\\ k\neq i}}^{2}\left(A_i-A_k\right)\left(A_i-A_k\right)^{+}$ ($i=0,\,1,\,2$) соответственно и оператор $F:K_{m,\,s}\to K_{p,\,q}$.

Теорема 4. *Пусть* $F(A_k)=M_kN_k$ *– скелетные разложения,* l_k *– ранги матриц* $F(A_k)$ (k = 0, 1, 2) *и справедливы неравенства* $l_k \le r_k$ (k = 0, 1, 2)*, тогда матричный многочлен*

$$L_2(X)=F(A_0)N_0^+S_{l_0r_0}B_0^+(X-A_1)(A_0-A_1)^+(X-A_2)(A_0-A_2)^+C_0^+S_{r_0l_0}M_0^+F(A_0)+$$
$$+F(A_1)N_1^+S_{l_1r_1}B_1^+(X-A_0)(A_1-A_0)^+(X-A_2)(A_1-A_2)^+C_1^+S_{r_1l_1}M_1^+F(A_0)+$$
$$+F(A_2)N_2^+S_{l_2r_2}B_2^+(X-A_0)(A_2-A_0)^+(X-A_1)(A_2-A_1)^+C_2^+S_{r_2l_2}M_2^+F(A_2) \quad (15)$$

является квадратичным интерполяционным многочленом для функции $F(X)$*, т. е. удовлетворяет условиям*

$$L_2(A_\nu)=F(A_\nu) \ (\nu=0,\,1,\,2). \quad (16)$$

Доказательство. Действительно, для любого узла A_ν (ν = 0, 1, 2) имеем

$$L_2(A_\nu)=F(A_\nu)N_\nu^+S_{l_\nu r_\nu}B_\nu^+\left(\prod_{\substack{k=0,\\k\ne\nu}}^{2}(A_\nu-A_k)(A_\nu-A_k)^+\right)C_\nu^+S_{r_\nu l_\nu}M_\nu^+F(A_\nu)=$$
$$=F(A_\nu)N_\nu^+S_{l_\nu r_\nu}B_\nu^+B_\nu C_\nu C_\nu^+S_{r_\nu l_\nu}M_\nu^+F(A_\nu)=F(A_\nu)N_\nu^+S_{l_\nu r_\nu}I_{r_\nu}S_{r_\nu l_\nu}M_\nu^+F(A_\nu)=$$
$$=F(A_\nu)N_\nu^+I_{l_\nu}M_\nu^+F(A_\nu)=F(A_\nu)N_\nu^+M_\nu^+F(A_\nu)=F(A_\nu)F(A_\nu)^+F(A_\nu)=F(A_\nu),$$

т. е. квадратичный многочлен $L_2(A_\nu)$, заданный по правилу (15), удовлетворяет интерполяционным условиям (16).

Пример 4. Пусть $m = 3$, $s = 2$, $q = 1$,

$$F(X)=\begin{bmatrix}2&0&1\\1&-3&0\\-1&0&-2\end{bmatrix}X\begin{bmatrix}1\\-4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\3\\17\end{bmatrix},\ A_0=\begin{bmatrix}2&7\\-1&0\\5&1\end{bmatrix},\ A_1=\begin{bmatrix}1&0\\17&0\\-3&1\end{bmatrix},\ A_2=\begin{bmatrix}3&-9\\8&2\\0&3\end{bmatrix},$$

тогда

$$F(A_0)=\begin{bmatrix}-51\\-20\\41\end{bmatrix},\ F(A_1)=\begin{bmatrix}-5\\-47\\30\end{bmatrix},\ F(A_2)=\begin{bmatrix}66\\42\\2\end{bmatrix};\ l_k=1,\ r_k=2\ (k=0,\,1,\,2).$$

Далее

$$(A_0-A_1)^+=-(A_1-A_0)^+=\frac{1}{97}\begin{bmatrix}0&-\frac{9}{2}&2\\ \frac{97}{7}&\frac{9}{14}&-\frac{2}{7}\end{bmatrix},$$

$$(A_0-A_2)^+=-(A_2-A_0)^+=\frac{1}{271}\begin{bmatrix}-\frac{17}{13}&-23&\frac{163}{13}\\ \frac{213}{13}&-\frac{11}{4}&-\frac{87}{52}\end{bmatrix},$$

$$(A_1-A_2)^+=-(A_2-A_1)^+=\frac{1}{3733}\begin{bmatrix}46&\frac{741}{2}&-\frac{327}{2}\\393&41&-139\end{bmatrix},\ N_0^+=N_1^+=N_2^+=1,$$

$$B_0^+ = \frac{1}{19\,783}\begin{bmatrix} 20\,371 & 1638 & -728 \\ \frac{826}{3} & 20\,550 & -\frac{27\,400}{3} \end{bmatrix},\ C_0^+ = \frac{1}{271}\begin{bmatrix} \frac{3425}{13} & -21 \\ -21 & \frac{425}{2} \\ -\frac{511}{13} & -\frac{219}{2} \end{bmatrix},$$

$$B_1^+ = \frac{1}{62\,909}\begin{bmatrix} 68\,093 & 6696 & -2976 \\ -696 & 62\,010 & -27\,560 \end{bmatrix},\ C_1^+ = \frac{1}{3733}\begin{bmatrix} 3445 & -372 \\ -372 & \frac{6505}{2} \\ -924 & -\frac{2387}{2} \end{bmatrix},$$

$$B_2^+ = \frac{1}{275\,891}\begin{bmatrix} 283\,979 & 10\,447 & -60\,043 \\ -8880 & 264\,421 & -139\,563 \end{bmatrix},\ C_2^+ = C_1^+,$$

$$M_0^+ = \frac{1}{4682}\begin{bmatrix} -51 & -20 & 41 \end{bmatrix},\ M_1^+ = \frac{1}{3134}\begin{bmatrix} -5 & -47 & 30 \end{bmatrix},\ M_2^+ = \frac{1}{3062}\begin{bmatrix} 33 & 21 & 1 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$L_2(X) = \frac{1}{19\,783}\begin{bmatrix} -1\,038\,921 & -83\,538 & 37\,128 \\ -407\,420 & -32\,760 & 14\,560 \\ 835\,211 & 67\,158 & -29\,848 \end{bmatrix}\left(X - A_1\right)\left(A_0 - A_1\right)^+\left(X - A_2\right)\frac{1}{3523}\begin{bmatrix} -17 \\ 213 \end{bmatrix} +$$

$$+\frac{1}{62\,909}\begin{bmatrix} -340\,465 & -33\,480 & 14\,880 \\ -3\,200\,371 & -314\,712 & 139\,872 \\ 2\,042\,790 & 200\,880 & -89\,280 \end{bmatrix}\left(X - A_0\right)\left(A_1 - A_0\right)^+\left(X - A_2\right)\frac{1}{3733}\begin{bmatrix} 46 \\ 393 \end{bmatrix} +$$

$$+\frac{1}{275\,891}\begin{bmatrix} 18\,742\,614 & 689\,502 & -3\,962\,838 \\ 11\,927\,118 & 438\,774 & -2\,521\,806 \\ 567\,958 & 20\,894 & -120\,086 \end{bmatrix}\left(X - A_0\right)\left(A_2 - A_0\right)^+\left(X - A_1\right)\frac{1}{3733}\begin{bmatrix} -46 \\ -393 \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Для формулы (17) выполняются интерполяционные условия (16).

Интерполяционные матричные многочлены произвольных фиксированных степеней в пространстве прямоугольных матриц

Далее приведем обобщение [4; 5] формул (4) и (15) для линейной и квадратичной интерполяции соответственно на случай матричных интерполяционных многочленов произвольных фиксированных степеней. Пусть оператор $F : K_{m,s} \to K_{p,q}$, узлы $A_0, A_1, \ldots, A_n$ – различные прямоугольные матрицы порядка $m \times s$, $l_{nk}(X) = \prod_{\substack{i=0,\\ i\neq k}}^{n}\left(X - A_i\right)\left(A_k - A_i\right)^+ \ \left(X \in K_{m,s}\right)$, а r_k и l_k – ранги матриц $l_{nk}\left(A_k\right)$ и $F\left(A_k\right)$ соответственно, $l_k \le r_k$ ($k = 0, 1, \ldots, n$).

Теорема 5. *Пусть* $l_{nk}\left(A_k\right) = B_k C_k$ *и* $F\left(A_k\right) = M_k N_k$ *– скелетные разложения матриц* $l_{nk}\left(A_k\right)$ *и* $F\left(A_k\right)$ ($k = 0, 1, \ldots, n$). *Тогда для матричного многочлена*

$$L_n(X) = \sum_{k=0}^{n} F\left(A_k\right)N_k^+ S_{l_k r_k} B_k^+ l_{nk}(X) C_k^+ S_{r_k l_k} M_k^+ F\left(A_k\right) \tag{18}$$

выполняются равенства

$$L_n\left(A_\nu\right) = F\left(A_\nu\right) \ (\nu = 0, 1, \ldots, n). \tag{19}$$

Доказательство. Заметим сначала, что $l_{nk}\left(A_\nu\right)=\delta_{k\nu}B_kC_k$, где $\delta_{k\nu}$ – символ Кронекера. Матрицы B_k и C_k имеют максимальный ранг r_k. В этом случае

$$B_k^+=\left(B_k^*B_k\right)^{-1}B_k^*,\ C_k^+=C_k^*\left(C_kC_k^*\right)^{-1},$$

т. е. $B_k^+B_k=I_{r_k}$, $C_kC_k^+=I_{r_k}$. С учетом предыдущих равенств имеем

$$L_n\left(A_\nu\right)=F\left(A_\nu\right)N_\nu^+S_{l_\nu r_\nu}B_\nu^+l_{n\nu}\left(A_\nu\right)C_\nu^+S_{r_\nu l_\nu}M_\nu^+F\left(A_\nu\right)=$$
$$=F\left(A_\nu\right)N_\nu^+S_{l_\nu r_\nu}B_\nu^+B_\nu C_\nu C_\nu^+S_{r_\nu l_\nu}M_\nu^+F\left(A_\nu\right)+F\left(A_\nu\right)F^+\left(A_\nu\right)F\left(A_\nu\right)=F\left(A_\nu\right),$$

т. е. для матричного многочлена (18) интерполяционные условия (19) выполняются.

В частном случае при $n = 1$ придем к формуле линейной интерполяции

$$L_1(X)=F\left(A_0\right)N_0^+S_{lr}B^+\left(X-A_1\right)C^+S_{rl}M_0^+F\left(A_0\right)-F\left(A_1\right)\times$$
$$\times N_1^+S_{tr}B^+\left(X-A_0\right)C^+S_{rt}M_1^+F\left(A_1\right). \tag{20}$$

Здесь $F\left(A_i\right)=M_iN_i$ – скелетные разложения матриц $F\left(A_i\right)$ ($i = 0, 1$), l – ранг матрицы $F\left(A_0\right)$, t – ранг матрицы $F\left(A_1\right)$, $A_0-A_1=BC$ – скелетное разложение матрицы $A_0 - A_1$ и r – ее ранг ($l, t \le r$).

Отметим, что формула (20) совпадает с построенной ранее формулой линейной интерполяции (4), а матричный многочлен (18) при значении $n = 2$ – с квадратичным интерполяционным многочленом $L_2(X)$ вида (15).

Частные случаи интерполяционных формул с узлами, являющимися квадратными матрицами

Из определения псевдообратной матрицы и способа ее построения через скелетное разложение следует, что если A – невырожденная квадратная матрица порядка m, то для нее существует обратная A^{-1}, и если $A = BC$ – ее скелетное разложение, то $B = A$, а $C = I_m$ – единичная матрица порядка m, при этом $A^{-1}B = BA^{-1} = I_m$, $AC = CA = A$.

Рассмотрим формулы интерполирования матричными многочленами первой степени. Пусть A_0, A_1 – квадратные матрицы порядка s, для которых существует обратная матрица $\left(A_0-A_1\right)^{-1}$, а оператор $F:K_s\to K_{p,q}$, где, как и ранее, K_s – пространство квадратных матриц порядка s.

При сделанных предположениях матричный многочлен (4) примет вид

$$\begin{gathered}L_1(X)=F\left(A_0\right)C_0^+S_{ls}\left(A_0-A_1\right)^{-1}\left(X-A_1\right)S_{sl}B_0^+F\left(A_0\right)+\\+F\left(A_1\right)C_1^+S_{ts}\left(A_1-A_0\right)^{-1}\left(X-A_0\right)S_{st}B_1^+F\left(A_1\right),\end{gathered} \tag{21}$$

где $F\left(A_k\right)=B_kC_k$ – скелетные разложения матриц $F\left(A_k\right)$ ($k = 0, 1$); l – ранг матрицы $F\left(A_0\right)$; t – ранг матрицы $F\left(A_1\right)$. Многочлен (21) является интерполяционным для $F(X)$, если справедливы неравенства $l \le s$ и $t \le s$.

Аналогично матричный многочлен (12) при предположениях, сделанных выше, запишется в виде

$$L_1(X)=F\left(A_0\right)+\left[F\left(A_1\right)-F\left(A_0\right)\right]C_0^+S_{ls}\left(A_1-A_0\right)^{-1}\left(X-A_0\right)S_{sl}B_0^+\left[F\left(A_1\right)-F\left(A_0\right)\right], \tag{22}$$

где $F\left(A_1\right)-F\left(A_0\right)=B_0C_0$ – скелетное разложение матрицы $F\left(A_1\right)-F\left(A_0\right)$; l – ее ранг. Условие того, что многочлен (22) является интерполяционным, имеет вид $l \le s$.

Далее рассмотрим формулы интерполирования матричными многочленами произвольной фиксированной n-й степени. Пусть $A_0, A_1, \ldots, A_n$ – квадратные матрицы порядка s, для которых существуют обратные матрицы $\left(A_i-A_k\right)^{-1}$ ($i, k = 0, 1, \ldots, n$; $i \ne k$), а $F:K_s\to K_{p,q}$ – оператор, где K_s и $K_{p,q}$ – пространства матриц порядков s и $p\times q$ соответственно.

Матричный многочлен (18) при сделанных предположениях примет вид

$$L_n(X) = \sum_{k=0}^{n} F(A_k) N_k^+ S_{l_k s} \left(\prod_{\substack{i=0,\\ i \neq k}}^{n} (X - A_i)(A_k - A_i)^{-1} \right) S_{s l_k} M_k^+ F(A_k), \tag{23}$$

где l_k – ранги матриц $F(A_k)$ ($k = 0, 1, \ldots, n$); $F(A_k) = M_k N_k$ – скелетные разложения матриц $F(A_k)$ ($k = 0, 1, \ldots, n$). Если $l_k \leq s$ ($k = 0, 1, \ldots, n$), то многочлен (23) является интерполяционным для функции $F(X)$.

Частные случаи интерполяционных формул для значений функции, являющихся квадратными матрицами

Сначала рассмотрим случай линейного интерполирования. Пусть определен оператор $F : K_{m,s} \to K_p$ и заданы узлы $A_0, A_1 \in K_{m,s}$.

В случае когда существуют обратные матрицы $\left[F(A_0)\right]^{-1}$, $\left[F(A_1)\right]^{-1}$, матричный многочлен (4) примет вид

$$L_1(X) = F(A_0) S_{pr} B^+ (X - A_1)(A_0 - A_1)^+ B S_{rp} + F(A_1) S_{pr} B^+ (x - A_0)(A_1 - A_0)^+ B S_{rp}, \tag{24}$$

где $A_0 - A_1 = BC$ – скелетное разложение; r – ранг матрицы $A_0 - A_1$. Многочлен (24) является интерполяционным, если справедливо неравенство $p \leq r$.

Если же существует обратная матрица $\left[F(A_1) - F(A_0)\right]^{-1}$, то матричный многочлен $L_1(x)$, заданный формулой (12), запишется в виде

$$L_1(X) = F(A_0) + \left[F(A_1) - F(A_0)\right] S_{pr} B^+ (X - A_0)(A_1 - A_0)^+ B S_{rp}, \tag{25}$$

где $A_1 - A_0 = BC$ – скелетное разложение; r – ранг матрицы $A_1 - A_0$. Необходимое условие того, что многочлен (25) является интерполяционным, имеет вид $p \leq r$.

Далее рассмотрим случай интерполирования матричными многочленами произвольной фиксированной n-й степени. Пусть $A_0, A_1, \ldots, A_n$ – матрицы порядка $m \times s$, $F : K_{m,s} \to K_p$ – оператор, где $K_{m,s}$ и K_p – пространства матриц порядков $m \times s$ и p соответственно. Через $\prod_{\substack{i=0,\\ i \neq k}}^{n} (A_k - A_i)(A_k - A_i)^+ = B_k C_k$ ($k = 0, 1, \ldots, n$) обозначим скелетные разложения матриц $\prod_{\substack{i=0,\\ i \neq k}}^{n} (A_k - A_i)(A_k - A_i)^+$, а через r_k – их ранги ($k = 0, 1, \ldots, n$).

Если существуют обратные матрицы $\left[F(A_k)\right]^{-1}$ ($k = 0, 1, \ldots, n$), то матричный многочлен $L_n(X)$, заданный по правилу (18), примет вид

$$L_n(X) = \sum_{k=0}^{n} F(A_k) S_{p r_k} B_k^+ \left(\prod_{\substack{i=0,\\ i \neq k}}^{n} (X - A_i)(A_k - A_i)^+ \right) C_k^+ S_{r_k p}, \tag{26}$$

где p – ранги матриц $F(A_k)$ ($k = 0, 1, \ldots, n$). Если $p \leq r_k$ ($k = 0, 1, \ldots, n$), то многочлен (26) является интерполяционным для $F(X)$.

Частный случай интерполяционных формул для узлов и значений функции, одновременно являющихся квадратными матрицами

Рассмотрим случай интерполяционных формул, когда узлы и значения матричной функции одновременно являются квадратными матрицами различного порядка.

Сначала построим формулы линейного интерполирования. Пусть $F : K_s \to K_p$ – оператор, где, как и ранее, K_s и K_p – пространства квадратных матриц порядков s и p соответственно, а узлы $A_0, A_1 \in K_s$.

При условии существования обратных матриц $(A_0 - A_1)^{-1}, \left[F(A_0)\right]^{-1}, \left[F(A_1)\right]^{-1}$ формула (4) примет вид

$$L_1(X)=F(A_0)S_{ps}(A_0-A_1)^{-1}(X-A_1)S_{sp}+F(A_1)S_{ps}(A_1-A_0)^{-1}(x-A_0)S_{sp}. \tag{27}$$

Матричный многочлен (27) является интерполяционным, если справедливо неравенство $p \le s$.

Если же существуют обратные матрицы $(A_0-A_1)^{-1}$, $\left[F(A_1)-F(A_0)\right]^{-1}$, то матричный многочлен (12) запишется в виде

$$L_1(X)=F(A_0)+\left[F(A_1)-F(A_0)\right]S_{ps}(A_1-A_0)^{-1}(X-A_0)S_{sp}, \tag{28}$$

где $F(A_1)-F(A_0)=B_0C_0$ – скелетное разложение; p – ранг матрицы $F(A_1)-F(A_0)$. Когда $p \le s$, многочлен (28) является интерполяционным.

Далее перейдем к случаю интерполирования матричными многочленами произвольной фиксированной n-й степени. Пусть определен оператор $F: K_s \to K_p$ и заданы узлы $A_0, A_1, \ldots, A_n \in K_s$.

Если существуют обратные матрицы $(A_k-A_i)^{-1}$, $\left[F(A_k)\right]^{-1}$ ($k, i=0, 1, \ldots, n$), то формула (4) примет вид

$$L_n(X)=\sum_{k=0}^{n}F(A_k)S_{ps}\left(\prod_{\substack{i=0,\\ i\ne k}}^{n}(X-A_i)(A_k-A_i)^{-1}\right)S_{sp}. \tag{29}$$

Матричный многочлен (29) является интерполяционным, если $p \le s$.

Далее рассмотрим случай интерполяционных формул, когда узлы и значения матричной функции одновременно являются квадратными матрицами одинакового порядка.

Сначала построим формулы линейного интерполирования. Пусть оператор $F: K_s \to K_s$ и узлы $A_0, A_1 \in K_s$.

Если существуют обратные матрицы $(A_0-A_1)^{-1}$, $\left[F(A_0)\right]^{-1}$, $\left[F(A_1)\right]^{-1}$, то многочлен (4) примет вид интерполяционного многочлена в форме Лагранжа:

$$L_1(X)=F(A_0)(A_0-A_1)^{-1}(x-A_1)+F(A_1)(A_1-A_0)^{-1}(X-A_0).$$

При условии существования обратных матриц $(A_0-A_1)^{-1}$, $\left[F(A_1)-F(A_0)\right]^{-1}$ многочлен (12) принимает вид линейного интерполяционного многочлена в форме Ньютона:

$$L_1(X)=F(A_0)+\left[F(A_1)-F(A_0)\right](A_1-A_0)^{-1}(X-A_0).$$

Перейдем к случаю интерполирования матричными многочленами произвольной степени. Пусть $F: K_s \to K_s$ – оператор, а узлы $A_0, A_1, \ldots, A_n \in K_s$.

Если существуют обратные матрицы $(A_k-A_i)^{-1}$ и $\left[F(A_k)\right]^{-1}$ ($k, i=0, 1, \ldots, n$), то матричный многочлен (18) для интерполяции матричными многочленами произвольной фиксированной n-й степени запишется в виде

$$L_n(X)=\sum_{k=0}^{n}F(A_k)\left(\prod_{\substack{i=0,\\ i\ne k}}^{n}(X-A_i)(A_k-A_i)^{-1}\right).$$

В заключение отметим, что монография [4] посвящена вопросам теории интерполирования функций от квадратных и прямоугольных стационарных и функциональных матричных переменных с умножением в обычном смысле, по Йордану, Адамару, Фробениусу и др. Достаточно полная теория интерполирования операторов, заданных на множествах функций и матриц, изложена в монографии [5].

Библиографические ссылки

1. Гантмахер ФР. *Теория матриц*. Москва: Наука; 1967. 575 с.

2. Магнус ЯР, Нейдеккер Х. *Матричное дифференциальное исчисление с приложениями к статистике и эконометрике*. Москва: Физматлит; 2002. 496 с.

3. Makarov VL, Khlobystov VV, Yanovich LA. *Methods of operator interpolation*. Київ: Інститут математики НАН України; 2010. 517 с. (Праці інституту математики НАН України; випуск 83).

4. Янович ЛА, Игнатенко МВ. *Основы теории интерполирования функций матричных переменных*. Минск: Беларуская навука; 2016. 281 с.

5. Янович ЛА, Игнатенко МВ. *Интерполяционные методы аппроксимации операторов, заданных на функциональных пространствах и множествах матриц.* Минск: Беларуская навука; 2020. 476 с.

References

1. Gantmakher FR. *Teoriya matrits* [Matrix theory]. Moscow: Nauka; 1967. 575 p. Russian.

2. Magnus YaR, Neidekker Kh. *Matrichnoe differentsial'noe ischislenie s prilozheniyami k statistike i ekonometrike* [Matrix differential calculus with applications to statistics and econometrics]. Moscow: Fizmatlit; 2002. 496 p. Russian.

3. Makarov VL, Khlobystov VV, Yanovich LA. *Methods of operator interpolation.* Kyiv: Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine; 2010. 517 p. (Praci instytutu matematyky NAN Ukrai'ny; volume 83).

4. Yanovich LA, Ignatenko MV. *Osnovy teorii interpolirovaniya funktsii matrichnykh peremennykh* [Bases of the theory of interpolation of functions of matrix variables]. Minsk: Belaruskaja navuka; 2016. 281 p. Russian.

5. Yanovich LA, Ignatenko MV. *Interpolyatsionnye metody approksimatsii operatorov, zadannykh na funktsional'nykh prostranstvakh i mnozhestvakh matrits* [Interpolation methods for approximation of operators defined on function spaces and sets of matrices]. Minsk: Belaruskaja navuka; 2020. 476 p. Russian.

Получена 25.07.2022 / исправлена 30.08.2022 / принята 30.09.2022.
Received 25.07.2022 / revised 30.08.2022 / accepted 30.09.2022.