Вісник Астрономічної школи | Astronomical School's Report

ISSN 2411–6602 (Online)
ISSN 1607–2855 (Print)
Том 16 • № 2 • 2020 С. 38 – 42
https://doi.org/10.18372/2411-6602.16.06

УДК 52.14; 52.17; 51.74

Оцінка точності величин, що визначаються з функціональних залежностей

М.М. Фис, А.М. Бридун*, А.Р. Согор

Національний університет «Львівська політехніка», 79013, м. Львів, вул. Карпінського, 6

Виконано узагальнення формули апріорної оцінки точності для випадку неявно заданих функцій. При цьому в основу покладено класичне визначення середньоквадратичної похибки, яка подається як сума квадратів добутків частинних похідних від аргументів та похибок їх визначення. Диференціювання здійснюється із залученням теорії неявних функцій багатьох змінних, для якої не вимагається явного задання функції аналітичним виразом. Відповідні похідні визначаються диференціюванням рівняння, в якому фігурує досліджувана функція, за відповідними змінними, включаючи і саму функцію. Для обчислень потрібні лише значення функції та аргументів, для яких проводиться оцінка точності. Ці значення знаходяться різними способами, у тому числі наближеними методами розв'язування нелінійних рівнянь (наприклад, методом Ньютона, методом половинного ділення). Такий підхід узагальнюється на випадок декількох функцій, які визначаються вже з сукупності нелінійних рівнянь. Їх диференціювання дає лінійну систему, розв'язки якої є елементами у формулах для оцінки точності кожної з функцій. Розв'язок цієї системи визначається методом Крамера. Оскільки матриця коефіцієнтів для всіх лінійних систем є однаковою, то для розв'язування доцільно використати метод оберненої матриці. Це значно скорочує кількість обчислень. Значення функцій, для яких визначаються похибки, отримуються з системи рівнянь, що пов'язують їх. Пошук їх є значно проблематичніший, ніж для однієї змінної. Таким чином, отримується строга апріорна оцінка точності без будь-яких обмежень на досліджувані функції, наприклад, у вигляді наближеного їх подання рядами Тейлора або приблизних оцінок при розв'язуванні рівнянь. Запропонована методика апробована на тестових прикладах, які охоплюють оцінку точності як для однієї, так і для двох змінних, причому для першого розглянутий практичний випадок. Результати обчислень підтверджують доцільність використання наведеної методики. Тому на рівнозначній основі, поряд з традиційним підходом, наведений алгоритм можна застосовувати в більш складних випадках, тобто для випадку неявного визначення функції.

Ключові слова: неявна функція; частинні похідні; теорія похибок.

1. ВСТУП

Середня квадратична похибка (СКП) є важливою характеристикою функції при її обчисленні, так як дає діапазон її зміни, що залежить від похибок аргументів [1, 4]. Якщо обчислення виразу здійснюється безпосередньо за заданою формулою

$$p = f(l_1, l_2, ..., l_m), \tag{1}$$

де $l_1, l_2, ..., l_m$ — значення, отримані за результатами вимірювань, то легко встановити похибку її обчислення в залежності від точності визначення параметрів, що входять в цю формулу [1]:

$$m_p^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial l_1}\right)^2 m_{l_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial l_2}\right)^2 m_{l_2}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial l_m}\right)^2 m_{l_m}^2. \tag{2}$$

Але в багатьох випадках функція визначається за зв'язками між шуканими змінними та параметрами, що отримуються за результатами спостережень з певною точністю. Визначення величини p здійснюється в даному випадку шляхом розв'язування нелінійного рівняння $F(p, l_1, l_2, ..., l_m) = 0$ одним з наближених методів (метод половинного ділення, Ньютона або простої ітерації), та залежить від значень l_i, $i = 1, ..., m$. Очевидно, що похибки вимірювань впливають на остаточне значення шуканої величини. В даній роботі ми не враховуємо похибки обчислень методу наближення, вважаючи, що вони проведені з точністю «машинного нуля».

2. ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ МЕТОДУ ТА ЙОГО АПРОБАЦІЯ

Для формули (2) необхідні вирази для похідних $\frac{\partial f}{\partial l_i}$, які не можуть бути визначені безпосередньо, бо немає подання виду (1). Тому визначаємо їх, користуючись математичним апаратом функцій багатьох змінних, а саме використовуємо формулу для часткових похідних функції, заданої неявно [2, 3],

$$F(p, l_1, l_2, ..., l_m) = 0. \tag{3}$$

Похідні визначаються так:

$$\frac{\partial f}{\partial l_i} = -\frac{\partial F}{\partial l_i} \bigg/ \frac{\partial F}{\partial p}. \tag{4}$$

* Бридун Андрій Михайлович; ✉ andrii.m.brydun@lpnu.ua

Тому формула (2) з урахуванням (4) та $\frac{\partial F}{\partial p} \neq 0$ набуде вигляду

$$m_p^2 = \frac{1}{\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)^2}\left(\left(\frac{\partial F}{\partial l_1}\right)^2 m_{l_1}^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial l_2}\right)^2 m_{l_2}^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial l_m}\right)^2 m_{l_m}^2\right). \tag{5}$$

Таким чином, отримано формулу для апріорної оцінки точності. Такий підхід дозволяє узагальнити результати на випадок багатьох змінних.

Нехай система рівнянь

$$\begin{cases} G_1(p_1, ..., p_n, u_1, ..., u_m) = 0, \\ \ldots \\ G_n(p_1, ..., p_n, u_1, ..., u_m) = 0 \end{cases} \tag{6}$$

має розв'язок

$$\begin{cases} p_1 = f_1(u_1, ..., u_m), \\ \ldots \\ p_1 = f_1(u_1, ..., u_m), \end{cases} \tag{7}$$

що залежить від параметрів $u_1, ..., u_m$. Для його існування повинна виконуватись умова: якобіан в точці розв'язку не рівний нулю, тобто

$$\frac{D(G_1, G_2, ..., G_n)}{D(p_1, p_2, ..., p_n)} = \Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial p_1} & \frac{\partial G_1}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial p_n} \\ \frac{\partial G_2}{\partial p_1} & \frac{\partial G_2}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial G_2}{\partial p_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial G_n}{\partial p_1} & \frac{\partial G_n}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial G_n}{\partial p_n} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{8}$$

Аргументи $u_1, ..., u_m$ визначається з певною похибкою. Тому для всіх змінних p_i їх похибки можна подати наступним чином:

$$m_{p_i}^2 = \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial p_i}{\partial u_j}\right)^2 du_j^2. \tag{9}$$

Для визначення елементів виразу (9) диференціюємо послідовно рівняння системи (6) за параметрами u_l за правилами диференціювання складних функцій:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial G_1}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial u_j} + \frac{\partial G_1}{\partial u_j} = 0, \\ \ldots \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial G_n}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial u_j} + \frac{\partial G_n}{\partial u_j} = 0, \end{cases} \qquad j = 1, ..., m. \tag{10}$$

Система рівнянь (10) з індексом j є лінійною відносно невідомих $\frac{\partial p_i}{\partial u_j}$. Її розв'язок дає необхідні вирази шуканих величин.

Особливістю системи (10) є незалежність матриці коефіцієнтів при невідомих від індексу j. Тому її зручно розв'язувати методом Крамера, а саме:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial u_j} & \frac{\partial G_1}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial p_n} \\ \frac{\partial G_2}{\partial u_j} & \frac{\partial G_2}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial G_2}{\partial p_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial G_n}{\partial u_j} & \frac{\partial G_n}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial G_n}{\partial p_n} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial p_1} & \frac{\partial G_1}{\partial u_j} & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial p_n} \\ \frac{\partial G_2}{\partial p_1} & \frac{\partial G_2}{\partial u_j} & \cdots & \frac{\partial G_2}{\partial p_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial G_n}{\partial p_1} & \frac{\partial G_n}{\partial u_j} & \cdots & \frac{\partial G_n}{\partial p_n} \end{vmatrix}, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial p_1} & \frac{\partial G_1}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial u_j} \\ \frac{\partial G_2}{\partial p_1} & \frac{\partial G_2}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial G_2}{\partial u_j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial G_n}{\partial p_1} & \frac{\partial G_n}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial G_n}{\partial u_j} \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Розв'язок системи набуде вигляду

$$\frac{\partial p_i}{\partial u_j} = -\frac{\Delta_i}{\Delta}. \tag{12}$$

Зауважимо, що розв'язок також можна одержати за допомогою методу оберненої матриці.

Підставляючи знайдені значення (11) в (9), отримаємо необхідні оцінки. Зауважимо, що для кожного значення (8) вибираємо по одному з кожного розв'язку систем (9) з відповідним індексом невідомої.

Застосуємо наведену методику для конкретних задач.

При вимірюванні сторін a, b, c та кутів α, β, γ трикутника (рис. 1) виникають похибки, які є характерними для кожного приладу. Оскільки є надлишкові вимірювання, то ними можна скористатись для часткової компенсації впливу одної з систематичних похибок p на значення результатів лінійних вимірювань.

Лінійні та кутові величини пов'язані між собою теоремою косинусів:

$$(a+p)^2=(b+p)^2+(c+p)^2-2(b+p)(c+p)\cos\alpha. \qquad (13)$$

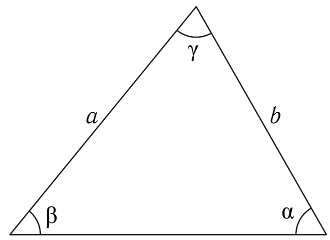

Рис. 1

Оскільки формула (13) повинна виконуватись для всіх кутів α,β,γ, то існує три умови для визначення поправок. Тому потрібно знайти врівноважене значення, для чого записуємо нев'язку

$$F(p,\alpha,\beta,\gamma,a,b,c)=\left(\cos\alpha-\frac{(b+p)^2+(c+p)^2-(a+p)^2}{2(b+p)(c+p)}\right)^2+$$
$$+\left(\cos\beta-\frac{(a+p)^2+(c+p)^2-(b+p)^2}{2(a+p)(c+p)}\right)^2+$$
$$+\left(\cos\gamma-\frac{(a+p)^2+(b+p)^2-(c+p)^2}{2(b+p)(a+p)}\right)^2\to\min,$$

похідна від якої дає рівняння для знаходження параметра p: $\dfrac{\partial F}{\partial p}=0$.

Формула (5) в даному випадку запишеться так:

$$m_p^2=\frac{1}{\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial p^2}\right)^2}\left(\left(\frac{\partial^2 F}{\partial a\,\partial p}\right)^2 m_a^2+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial b\,\partial p}\right)^2 m_b^2+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial c\,\partial p}\right)^2 m_c^2+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha\,\partial p}\right)^2 m_\alpha^2+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \beta\,\partial p}\right)^2 m_\beta^2+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \gamma\,\partial p}\right)^2 m_\gamma^2\right). \qquad (14)$$

Співвідношення для похідної

$$\frac{\partial F}{\partial p}=\left(\cos\alpha-\frac{(b+p)^2+(c+p)^2-(a+p)^2}{2(b+p)(c+p)}\right)\frac{(p+b+c-a)(b+p)(c+p)-\left((b+p)^2+(c+p)^2-(a+p)^2\right)\left(p+\frac{1}{2}(b+c)\right)}{(b+p)^2(c+p)^2}$$
$$+\left(\cos\beta-\frac{(a+p)^2+(c+p)^2-(b+p)^2}{2(a+p)(c+p)}\right)\frac{(p+a+c-b)(a+p)(c+p)-\left((a+p)^2+(c+p)^2-(b+p)^2\right)\left(p+\frac{1}{2}(a+c)\right)}{(a+p)^2(c+p)^2}+$$
$$+\left(\cos\gamma-\frac{(a+p)^2+(b+p)^2-(c+p)^2}{2(b+p)(a+p)}\right)\frac{(p+b+a-c)(a+p)(b+p)-\left((b+p)^2+(a+p)^2-(c+p)^2\right)\left(p+\frac{1}{2}(b+a)\right)}{(b+p)^2(a+p)^2}=0.$$

Формули для похідних є громіздкими. Тому в подальшому будемо практикувати знаходження похідних за допомогою математичних програм, які передбачають побудову аналітичного подання похідних функцій. Це значно пришвидшує їх пошук та практично виключає помилки при перетвореннях.

Наведемо обчислення для конкретного випадку. Вважаємо при цьому, що $m_a=m_b=m_c=1$ мм, $m_\alpha=m_\beta=m_\gamma=1''$.

Таблиця 1. Параметри трикутника для визначення поправки

a, м	b, м	c, м	α	β	γ
9,9903	10,005	14,1418	$90^\circ\,0'\,38{,}76''$	$45^\circ\,2'\,11{,}11''$	$44^\circ\,57'\,7{,}18''$

Таблиця 2. Значення поправки p та похибка m_p її визначення

p, мм	m_a, мм	m_α	m_p, мм
3,94684623	1	$1''$	3,4
3,94684623	0,5	$1''$	1,7
3,94684623	0,25	$1''$	0,856

Зауважимо, що рівняння (13) окремих випадках не має розв'язку (наприклад, коли трикутник рівносторонній).

Застосування другого випадку для визначення похибок розглянемо на модельному прикладі: оцінити похибку обчислення значень x,y розв'язку системи рівнянь для значень параметрів $u=1,v=1$, які визначені з похибкою 0,01:

$$\begin{cases}x^2+y^2+u^2+uv-4=0,\\ y^2+xy+u^3-v-2=0.\end{cases}$$

В нашому випадку система

$$\begin{cases}x^2+y^2-2=0,\\ y^2+xy-2=0.\end{cases}$$

дає значення невідомих: $x=1$, $y=1$.

Системи для визначення елементів формули (8) мають вигляд:

$$\begin{cases} 2x\dfrac{\partial x}{\partial u}+2y\dfrac{\partial y}{\partial u}+2u+v=0, \\ x\dfrac{\partial x}{\partial u}+(2y+x)\dfrac{\partial y}{\partial u}+3u^2=0, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x\dfrac{\partial x}{\partial v}+2y\dfrac{\partial y}{\partial v}+u=0, \\ x\dfrac{\partial x}{\partial v}+(2y+x)\dfrac{\partial y}{\partial v}-v=0, \end{cases} \quad \begin{cases} 2\dfrac{\partial x}{\partial u}+2\dfrac{\partial y}{\partial u}+3=0, \\ \dfrac{\partial x}{\partial u}+3\dfrac{\partial y}{\partial u}+3=0, \end{cases} \quad \begin{cases} 2\dfrac{\partial x}{\partial v}+2\dfrac{\partial y}{\partial v}+1=0, \\ \dfrac{\partial x}{\partial v}+3\dfrac{\partial y}{\partial v}-1=0. \end{cases}$$

Розв'язок цих систем наступний:

$$\frac{\partial x}{\partial u}=-\frac{3}{4}, \qquad \frac{\partial y}{\partial u}=-\frac{3}{4}, \qquad \frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{5}{4}, \qquad \frac{\partial y}{\partial v}=\frac{3}{4}.$$

Їх залучення до обчислень за формулами (8) дає $m_x=\frac{\sqrt{34}}{4}\cdot 0{,}01$, $m_y=\frac{3\sqrt{2}}{4}\cdot 0{,}01$.

Легко переконатись, що вплив похибок параметрів іншим способом, наприклад, оцінюючи прирости функцій за зміною параметрів (приростів аргументів), не можна в повній мірі врахувати, про що свідчать дані табл. 3. Незначні зміни приростів аргументів можуть давати суттєві «перекоси» приросту функцій (стовпець № 4, 6, 8).

Таблиця 3. Значення величин x, y для різних параметрів

Змінна	$u=1$ $v=1$	$u=1{,}01$ $v=1{,}01$	$\Delta u=0{,}01$ $\Delta v=0{,}01$ $\Delta x, \Delta y$	$u=1{,}02$ $v=1{,}01$	$\Delta u=0{,}02$ $\Delta v=0{,}01$ $\Delta x, \Delta y$	$u=1{,}02$ $v=0{,}99$	$\Delta u=\ 0{,}02$ $\Delta v=-0{,}01$ $\Delta x, \Delta y$
x	1	0,9796911	0,0203089	0,97216719	0,02783281	0,997840875	0,00215913
y	1	1,0000029	0,0000029	0,99211439	0,0078856	0,976787399	0,0232126

3. ВИСНОВКИ

1. Формули для оцінки точності визначення функцій, заданих неявно, доповнюють традиційні апріорні формули оцінки точності.

2. Визначення апріорних оцінок за наведеною методикою дає можливість їх отримання з без попередньої лінеаризації нелінійних рівнянь.

3. Як видно з наведених досліджень, визначені оцінки подаються безпосередньо через похибки змінних, від яких вони залежать. Це дає можливість більш достовірно оцінити їх значення.

1. *Зазуляк П.М., Гавриш В.І. Євсєєва Е.М., Йосипчук М.Д.* Основи математичного опрацювання геодезичних вимірювань: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / заг. ред. В.І. Гавриш. — Львів: Видавництво "Растр-7", 2007. — 408 с.
2. *Немыцкий В., Слудская М., Черкасов А.* Курс математического анализа. — М.: Наука, 1967. — 498 с.
3. *Глотов В., Фис М.* Оцінка точності кутових елементів зовнішнього орієнтування цифрових зображень, отриманих з БПЛА з застосуванням похідних неявно заданих функцій // Матеріали 25-ї міжнародної науково-технічної конференції «ГЕОФОРУМ-2020», 1–3 квітня 2020 р., Львів – Яворів – Брюховичі, Україна. — С.3–7.
4. *Безменов В.М., Сафин К.И.* Оценка точности прямой фотограмметрической засечки для произвольного случая съёмки разными камерами // Изв. вузов «Геодезия и аэрофотосъемка». — 2020. — Т. 64, № 4. — С.415–422.

Оценка точности величин, определяемых из функциональных зависимостей

Фыс М.М., Брыдун А.М., Согор А.Р.

Национальный университет «Львовская политехника», 79013, г. Львов, ул. Карпинского, 6

Выполнено обобщение формулы априорной оценки точности для случая неявно заданных функций. При этом в основу положено классическое определение среднеквадратической погрешности, которая представляется как сумма квадратов произведений частных производных от аргументов и погрешностей их определения. Дифференцирование осуществляется с привлечением теории неявных функций многих переменных, для которой не требуется явного задания функции аналитическим выражением. Соответствующие производные определяются дифференцированием уравнения, в котором фигурирует исследуемая функция, по соответствующим переменным, включая и саму функцию. Для вычислений нужны только значения функции и аргументов, для которых проводится оценка точности. Это значения находятся разными способами, в том числе приближенными методами решения нелинейных уравнений (например, методом Ньютона, методом половинного деления). Такой подход обобщается на случай нескольких функций, которые определяются уже из совокупности нелинейных уравнений. Их дифференцирование дает линейную систему, решения которой являются элементами в формулах для оценки точности каждой из функций. Решение этой системы определяется методом Крамера. Поскольку матрица коэффициентов для всех линейных систем одинакова, то для решения целесообразно использовать метод обратной матрицы. Это значительно сокращает количество вычислений. Значения функций, для которых определяются погрешности, получаются из системы связывающих их уравнений. Поиск их значительно проблематичнее, чем для одной переменной. Таким образом, получается строгая априорное оценка точности без каких-либо ограничений на исследуемые функции, например, в виде приближенного их представления рядами Тейлора или приблизительных оценок при решении уравнений. Предложенная методика апробирована на тестовых примерах, которые охватывают оценку точности как для одной, так и для двух переменных, причем для первого рассмотрен практический случай. Результаты вычислений подтверждают целесообразность использования приведенной методики. Поэтому на равнозначной основе, наряду с традиционным подходом, приведенный алгоритм можно применять в более сложных случаях, то есть для случая неявного определения функции.

Ключевые слова: неявная функция; частные производные; теория погрешностей.

Estimation of accuracy of the values defined from functional dependencies

Fys M.M., Brydun A.M., Sohor A.R.

Lviv Polytechnic National University, 79013, Lviv, Karpinskyi street 6

The generalization of the formula of a priori accuracy estimation for the case of implicitly given functions is performed. This is based on the classical definition of the root mean square error, which is given as the sum of the squares of the products of partial derivatives of the arguments and the errors of their definition. Differentiation of functions is carried out with the involvement of the theory of implicit functions of many variables, which does not require explicit assignment of the function by an analytical expression. The corresponding derivatives are determined by the differentiation of the equations in which the investigated function appears, according to the corresponding variables, including the function itself. Only the values of the function and arguments for which the accuracy is evaluated are required for the calculations. These values are found in different ways, including approximate methods for solving nonlinear equations (for example, Newton's method, half-division method). This approach is generalized to the case of several functions, which are already determined by a set of nonlinear equations. Their differentiation gives a linear system, which solutions are elements in the formulas for estimating the accuracy of each function. The solution of this system is determined by Cramer's method. Since the matrix of coefficients is the same for all linear systems, it is advisable to use the inverse matrix method to solve it. This significantly reduces the calculations. The values of the functions for which errors are determined are obtained from the set of equations that connect them. Finding them is much more problematic than for one variable. Thus, a strict priori estimate of accuracy is obtained without any restrictions on the studied functions, for example, in the form of their approximate representation by Taylor series or approximate estimates when solving equations. Proposed method is tested on test examples, which include the assessment of accuracy for both one and two variables, and is considered in the first case. The results of the calculations confirm the feasibility of using this technique. Therefore, with the traditional approach, the above algorithm can be used in more complex cases, i.e. for the case of implicit definition of the function.

Keywords: implicit function; partial derivatives; error theory.

Надійшла до редакції	/ Received	25.09.2020
Виправлена авторами	/ Revised	3.12.2020
Прийнята до друку	/ Accepted	7.12.2020