Математические заметки СВФУ
Октябрь—декабрь, 2022. Том 29, № 4

УДК 517.946

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Г. Э. Абдурагимов, П. Э. Абдурагимова, М. М. Курамагомедова

Аннотация. Рассматривается двухточечная краевая задача с однородными граничными условиями для одного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка на отрезке $[0,1]$. При ограничениях на правую часть уравнения надлинейного характера получены достаточные условия существования и единственности положительного решения исследуемой задачи. С помощью функции Грина краевая задача редуцируется к эквивалентному интегральному уравнению, и в последующем существование положительного решения доказывается с помощью известной теоремы Красносельского о растяжении конуса. Для установления единственности положительного решения был использован специальный принцип единственности для выпуклых операторов. В заключение приведен пример, иллюстрирующий выполнение полученных достаточных условий однозначной разрешимости поставленной задачи.

DOI: 10.25587/SVFU.2023.61.58.001

Ключевые слова: положительное решение, краевая задача, конус, конусный отрезок.

1. Постановка задачи

В данной работе на основе методов функционального анализа с помощью специальных топологических средств получены достаточные условия существования и единственности положительного решения краевой задачи для одного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка. Работ, посвященным краевым задачам для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка, сравнительно немного, например, среди последних публикаций [1–8]. В близкой к настоящей статье постановке задачи соответствующие результаты были получены в работах [9–11].

Рассмотрим краевую задачу

$$x^{(4)}(t) + f(t, x(t)) = 0, \quad 0 < t < 1, \tag{1}$$

$$x(0) = x''(0) = x'''(0) = 0, \tag{2}$$

$$x(1) = 0, \tag{3}$$

где $f(t,u)$ — неотрицательная непрерывная монотонно возрастающая на $[0,1] \times [0,\infty)$ функция, причем $f(\cdot,0) \equiv 0$.

Определение 1. Под *положительным решением задачи* (1)–(3) будем понимать положительную в интервале $(0,1)$ функцию $x \in C^4_{[0,1]}$, удовлетворяющую всюду на указанном интервале уравнению (1) и граничным условиям (2), (3).

Рассмотрим эквивалентное задаче (1)–(3) интегральное уравнение

$$x(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s,x(s))\, ds, \quad 0 \le t \le 1, \tag{4}$$

где $G(t,s)$ — функция Грина оператора $-\frac{d^4}{dt^4}$ с краевыми условиями (2), (3):

$$G(t,s) = \frac{1}{6} \begin{cases} t(1-s)^3, & \text{если } 0 \le t \le s, \\ t(1-s)^3 - (t-s)^3, & \text{если } s \le t \le 1. \end{cases}$$

Можно показать, что имеют место следующие свойства:

1) $G(t,s) \ge 0, \quad t,s \in [0,1]$;

2) $\frac{\partial^2 G(t,s)}{\partial t^2} \le 0, \quad t,s \in [0,1]$;

3) $\frac{1}{6}\varphi(t)\varphi^3(s) \le G(t,s) \le \frac{1}{6}\varphi(t)$,

где $\varphi(t) = \min(t, 1-t)$, $t,s \in [0,1]$.

В частности, из первых двух свойств вытекает, что решение задачи (1)–(3) неотрицательно и выпукло на $[0,1]$. В свою очередь, из выпуклости решения $x(t)$ на указанном отрезке следует неравенство

$$x(t) \ge \|x\| \varphi(t), \tag{5}$$

где $\|x\| = \max\limits_{t \in [0,1]} |x(t)|$.

В операторной форме уравнение (4) можно переписать в виде

$$x = Ax,$$

где A – вполне непрерывный оператор [12, с. 161], определенный равенством

$$(Ax)(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s,x(s))\, ds, \quad 0 \le t \le 1.$$

2. Основные результаты

В дальнейшем обозначим через $\widetilde{K}$ конус неотрицательных функций пространства $C_{[0,1]}$, удовлетворяющих условию (5). Справедлива следующая

Теорема 1. *Предположим, что*

$$a(t)\psi(u) \le f(t,u) \le bu^{\beta},$$

где $b > 0$, $\beta > 1$, $a(t)$ *— положительная непрерывная на* $[0,1]$ *функция,* $\psi(u)$ *— неотрицательная непрерывная монотонно возрастающая на* $[0,\infty)$ *функция, причем* $\lim\limits_{u\to\infty} \frac{\psi(u)}{u} = \infty$.

Тогда краевая задача (1)–(3) *имеет по крайней мере одно положительное решение.*

Доказательство. В дальнейшем под полуупорядочиванием $u \prec v$ и $u \overline{\prec} v$ в конусе $\widetilde{K}$ соответственно будем понимать $u(x) \le v(x)$ и $u(x) > v(x)$ при всех $x \in [0,1]$.

В силу определения и соответствующих свойств функции Грина рассматриваемой задачи можно заключить, что оператор A положителен на конусе $\widetilde{K}$.

Покажем существование такого числа $R > 0$, что при $x \in \widetilde{K}$ и $\|x\| \ge r$

$$Ax \overline{\prec} x. \tag{6}$$

Несложно проверить, что оператор B, определенный равенством

$$(Bx)(t) = \int\limits_0^1 G(t,s)a(s)\psi(x(s))\,ds,$$

является положительной монотонной минорантой A на $\widetilde{K}$. Кроме того, B сильно растет по направлению φ [13, с. 256]:

$$\lim_{\alpha\to\infty} \frac{\|B(\alpha\varphi)\|}{\alpha} = \infty. \tag{7}$$

Действительно, в силу условий настоящей теоремы и свойства 3 функции Грина имеем

$$\frac{(B\alpha\varphi)(t)}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}\int\limits_0^1 G(t,s)a(s)\psi(\alpha\varphi(s))\,ds \ge \frac{\varphi(t)}{6\alpha}\int\limits_0^1 \varphi^3(s)a(s)\psi(\alpha\varphi(s))\,ds$$

$$\ge \frac{\varphi(t)}{6\alpha}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \varphi^3(s)a(s)\psi(\alpha\varphi(s))\,ds, \quad 0 \le t \le 1,$$

где $0 < \tau_1 < \tau_2 < 1$. Нормируя последнее неравенство и устремив $\alpha \to \infty$, с учетом требований теоремы к ψ легко убедиться в справедливости (7). Тогда из соответствующей теоремы [12, с. 256] следует, что оператор A удовлетворяет условию (6).

Покажем теперь, что можно указать такое число $r > 0$, что для всех $\varepsilon > 0$ при $x \in \widetilde{K}$ и $0 < \|x\| \le R$

$$Ax \overline{\succ} (1+\varepsilon)x. \tag{8}$$

Действительно, воспользовавшись условиями теоремы и свойством 3 функции Грина, имеем

$$(Ax)(t) = \int\limits_0^1 G(t,s) f(s, x(s))\, ds \le \frac{b}{6}\varphi(t)\|x\|^{\beta} \le \frac{b}{6} R^{\beta-1}\varphi(t)\|x\|.$$

С учетом соотношения (5) получим

$$(Ax)(t) \le \frac{b}{6} R^{\beta-1} x(t).$$

Выбрав $R < \left(\frac{6}{b}\right)^{\frac{1}{\beta-1}}$, обеспечим выполнение требуемого соотношения (8).

На основании теоремы о растяжении конуса [13, с. 157] оператор A, растягивающий конус $\widetilde{K}$, имеет на этом конусе по крайней мере одну ненулевую неподвижную точку, что равносильно существованию по крайней мере одного положительного решения краевой задачи (1)–(3).

Введем обозначение $S = \{x \in \widetilde{K} : r \le \|x\| \le R\}$, где r и R — некоторые положительные числа, определенные ранее в теореме 1.

Теорема 2. *При выполнении условий теоремы* 1 *краевая задача* (1)–(3) *имеет единственное положительное решение в шаре S, если функция $f(t,u)$ непрерывно дифференцируема по u, производная $f'_u(t,u)$ монотонно возрастает по второму аргументу и*

$$\int\limits_0^1 \left|f'_u(s, M)\right| ds \le 4,$$

где $M = \left(\frac{6}{b}\right)^{\frac{1}{\beta-1}}$.

Доказательство. Для доказательства единственности положительного решения нам понадобится априорная оценка положительного решения задачи (1)–(3), полученная ранее в ходе доказательства теоремы 1:

$$0 < \|x\| < \left(\frac{6}{b}\right)^{\frac{1}{\beta-1}}. \tag{9}$$

В дальнейшем для удобства выкладок обозначим правую часть неравенства (9) через M.

Покажем вначале, что монотонный оператор A является u_0-выпуклым [13, с. 219] на конусе $\widetilde{K}$. Ввиду свойства 3 функции Грина естественно в качестве u_0 взять φ. Кроме того, для любого $\tau \in (0,1)$ в силу условий теоремы 1 и неравенства (9) имеем

$$(A\tau x)(t) \le \frac{\varphi(t)}{6} b \int\limits_0^1 (\tau x(s))^{\beta}\, ds \le \frac{b}{6}\tau^{\beta}\varphi(t)\|x\|^{\beta} \le \tau^{\beta}\varphi(t)\|x\| \le \tau^{\beta-1}\tau x(t).$$

Положив в соответствующем определении $\eta = 1 - \tau^{\beta-1}$, легко убедиться в u_0-выпуклости оператора A на конусе $\widetilde{K}$.

Допустим теперь, что уравнение (4) имеет два положительных решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Из принципа единственности [13, с. 220] для выпуклых операторов следует, что обе разности $x_1(t) - x_2(t)$ и $x_2(t) - x_1(t)$ не являются строго положительными функциями. Без ограничения общности можно считать, что разность $y(t) = x_1(t) - x_2(t)$ обладает следующим свойством: найдутся такие числа t_0 и t_1, что $y(t_0) = \max\limits_{0 \le t \le 1} y(t) = \|y\|$, $y(t_1) < 0$. Отсюда вытекает, что при любом числе l

$$\|y - l\| \ge \frac{1}{2}\|y\|. \tag{10}$$

Воспользовавшись формулой конечных приращений, из равенств

$$x_i(t) = \int\limits_0^1 G(t,s) f(s, x_i(s))\, ds \quad (i = 1,2),\ 0 \le t \le 1,$$

соответственно получим

$$y(t) = \int\limits_0^1 G(t,s) f'_u(s, \widetilde{x}(s)) y(s)\, ds, \quad 0 \le t \le 1,$$

где $\widetilde{x}(t)$ принимает значения, промежуточные между значениями $x_i(t)$, $i = 1, 2$.

Положив в (10) $l = 0$, в силу ограниченности функции Грина и монотонности производной $f'_u(t,u)$ по второму аргументу с учетом (9) получим

$$\frac{1}{2}\|y\| \le \|y\| < \frac{1}{4}\int\limits_0^1 |f'_u(s,M)|\big|y(s)\big|\, ds < \frac{1}{4}\int\limits_0^1 |f'_u(s,M)|\, ds \cdot \|y\|.$$

Таким образом, имеем

$$\int\limits_0^1 |f'_u(s,M)|\, ds > 4.$$

Если последнее неравенство не выполняется, то уравнение (4), а следовательно, и краевая задача (1)–(3) имеет единственное положительное решение, принадлежащее области S .

В качестве примера рассмотрим краевую задачу

$$x^{(4)}(t) + t^{\alpha} x^{\beta}(t) = 0, \quad 0 < t < 1, \tag{11}$$

$$x(0) = x''(0) = x'''(0 = 0, \tag{12}$$

$$x(1) = 0, \tag{13}$$

где $\alpha \ge \frac{1}{2}$, $\beta > 1$.

Выполнение условий теоремы 1, гарантирующих существование по меньшей мере одного положительного решения задачи (11)–(13), очевидно. Взяв в качестве b супремум t^{α} на [0,1], т. е. 1, при $\beta \le \frac{2}{3}(1 + \alpha)$ несложно убедиться и в выполнении условий теоремы 2, обеспечивающих единственность этого решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dang Q. A., Ngo T. K. Q.* Existence results and iterative method for solving the cantilever beam equation with fully nonlinear term // Nonlinear Anal., Real World Appl. 2017. V. 36. P. 56–58.

2. *Xu M., Ma R.* On a fourth-order boundary value problem at resonance // J. Function Spaces. 2017. V. 2017. P. 1–7.

3. *Zou Y.* On the existence of positive solutions for a fourth-order boundary value problem // J. Function Spaces. 2017. V. 2017. P. 1–5.

4. *Zhang Y., Cui Y.* Positive solutions for two-point boundary value problems for fourth-order differential equations with fully nonlinear terms // Math. Probl. Eng. 2020. V. 2020. P. 1–7.

5. *Okamoto Y., Onodera M.* Stability analysis of an overdetermined fourth order boundary value problem via an integral identity // J. Differ. Equ. 2021. V. 301. P. 97–111.

6. *Okamoto Y., Onodera M.* A class of fourth order nonlinear boundary value problem with singular perturbation // Appl. Math. Lett. 2021. V. 115. P. 56–58.

7. *Ma M.* Positive solutions for fourth-order equations with a sign-changing weight and clamped beam boundary bonditions // Bull. Iran. Math. Soc. 2022. V. 48. P. 1945–1958.

8. *Ali K. K., Mehanna M. S., Abdelrahman M. I., Shaalan M. A.* Analytical and numerical solutions for fourth order Lane–Emden–Fowler equation // Partial Differ. Equ. Appl. Math. 2022. V. 6. P. 1–10.

9. *Абдурагимов Э. И.* Положительное решение двухточечной краевой задачи для одного нелинейного ОДУ четвертого порядка // Изв. вузов. Математика. 2006. № 8. С. 3–6.

10. *Абдурагимов Э. И.* Положительное решение двухточечной краевой задачи для одного нелинейного ОДУ четвертого порядка и численный метод его построения // Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественнонауч. сер. 2010. Т. 76, № 2. С. 5–12.

11. *Абдурагимов Э. И.* Существование положительного решения двухточечной краевой задачи для одного нелинейного ОДУ четвертого порядка // Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественнонауч. сер. 2014. Т. 121, № 10. С. 9–16.

12. *Красносельский М. А., Покорный Ю. В.* Ненулевые решения уравнений с сильными нелинейностями // Мат. заметки. 1969. Т. 5, № 2. С. 253–260.

13. *Красносельский М. А.* Положительные решения операторных уравнений. М.: Физматгиз, 1962.

Поступила в редакцию 15 января 2022 г.
После доработки 3 октября 2022 г.
Принята к публикации 29 ноября 2022 г.

Абдурагимов Гусен Эльдерханович, Абдурагимова Патимат Эльдерхановна,
Курамагомедова Мадина Магомедрасуловна
Дагестанский государственный университет,
кафедра прикладной математики, ул. М. Гаджиева, 43-а, Махачкала 367000
gusen_e@mail.ru, abpatuka@mail.ru, madina19.12@mail.ru

Математические заметки СВФУ
Октябрь—декабрь, 2022. Том 29, № 4

UDC 517.946

ON THE EXISTENCE AND UNIQUENESS OF A POSITIVE SOLUTION TO A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A FOURTH–ORDER NONLINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION

G. E. Abduragimov, P. E. Abduragimova, and M. M. Kuramagomedova

Abstract: We consider a two-point boundary value problem with homogeneous boundary conditions for a single nonlinear fourth-order ordinary differential equation on the interval $[0, 1]$. Under restrictions on the right-hand side of the equation of a supralinear nature, sufficient conditions for the existence and uniqueness of a positive solution to the problem under study are obtained. With the help of the Green's function, the boundary value problem is reduced to an equivalent integral equation, and subsequently the existence of a positive solution is proved using the well-known Krasnoselsky cone extension theorem. To establish the uniqueness of the positive solution, a special principle of uniqueness for convex operators was used. In conclusion, an example is given that illustrates the fulfillment of the obtained sufficient conditions for the unique solvability of the problem posed.

DOI: 10.25587/SVFU.2023.61.58.001

Keywords: positive solution, boundary value problem, cone, cone segment.

REFERENCES

1. *Dang Q. A. and Ngo T. K. Q.*, "Existence results and iterative method for solving the cantilever beam equation with fully nonlinear term," Nonlinear Anal., Real World Appl., **36**, 56–58 (2017).
2. *Xu M. and Ma R.*, "On a fourth-order boundary value problem at resonance," J. Function Spaces, **2017**, 1–7 (2017).
3. *Zou Y.*, "On the existence of positive solutions for a fourth-order boundary value problem," J. Function Spaces, **2017**, 1–5 (2017).
4. *Zhang Y. and Cui Y.*, "Positive solutions for two-point boundary value problems for fourth-order differential equations with fully nonlinear terms," Math. Probl. Eng., **2020**, 1–7 (2020).
5. *Okamoto Y. and Onodera M.*, "Stability analysis of an overdetermined fourth order boundary value problem via an integral identity," J. Differ. Equ., **301**, 97–111 (2021).
6. *Okamoto Y. and Onodera M.*, "A class of fourth order nonlinear boundary value problem with singular perturbation," Appl. Math. Lett., **115**, 56–58 (2021).
7. *Ma M.*, "Positive solutions for fourth-order equations with a sign-changing weight and clamped beam boundary conditions," Bull. Iran. Math. Soc., **48**, 1945–1958 (2022).
8. *Ali K. K., Mehanna M. S., Abdelrahman M. I., and Shaalan M. A.*, "Analytical and numerical solutions for fourth order Lane–Emden–Fowler equation," Partial Differ. Equ. Appl. Math., **6**, 1–10 (2022).
9. *Abduragimov E. I.*, "Positive solution of a two-point boundary value problem for one nonlinear fourth-order ODE [in Russian]," Iz. vuzov, Ser. Mat., **8**, 3–6 (2006).

10. *Abduragimov E. I.*, “A positive solution of a two-point boundary value problem for one nonlinear fourth-order ODE and a numerical method for its construction [in Russian],” Vestn. Samar. Gos. Univ., Yestestvennonauch. Ser., **76**, No. 2, 5–12 (2010).
11. *Abduragimov E. I.*, “Existence of a positive solution to a two-point boundary value problem for one nonlinear fourth-order ODE [in Russian],” Vestn. Samar. Gos. Univ., Yestestvennonauch. Ser., **121**, No. 10, 9–16 (2014).
12. *Krasnoselsky M. A. and Pokorny Yu. V.*, “Nonzero solutions of equations with strong nonlinearities [in Russian],” Mat. Zametki, **5**, No. 2, 253–260 (1969).
13. *Krasnoselsky M. A.*, Positive Solutions of Operator Equations, Noordhoff, Groningen (1964).

Submitted January 15, 2022
Revised October 3, 2022
Accepted November 29, 2022

Gusen E. Abduragimov, Patimat E. Abduragimova, Madina M. Kuramagomedova
Dagestan State University,
Department of Applied Mathematics,
43-a M. Gadzhiev Street, Makhachkala 367000, Russia
gusen_e@mail.ru, abpatuka@mail.ru, madina19.12@mail.ru