Математические заметки СВФУ
Октябрь—декабрь, 2022. Том 29, № 4

УДК 517.9

СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ НЕКЛАССИЧЕСКОГО ТИПА НА КУСОЧНО ГЛАДКОЙ КРИВОЙ

А. П. Солдатов

Аннотация. Рассматриваются сингулярные интегральные операторы на кусочно гладкой кривой в весовых лебеговых и гёльдеровых пространствах с кусочно непрерывными матричными коэффициентами. В отличие от классического случая эти операторы помимо сингулярного оператора Коши содержат также некомпактные интегральные операторы специального вида, которые определяются ядром, приближенно однородным степени -1 относительно расстояний до узлов кривой. Подобные операторы возникают во многих приложениях. Получен критерий фредгольмовости этих операторов и приводится формула их индекса.

DOI: 10.25587/SVFU.2023.51.83.004

Ключевые слова: сингулярный интегральный оператор, кусочно гладкий контур, весовые пространства Лебега и Гёльдера, сингулярный оператор Коши, интегральный оператор с ядром, однородным степени -1, критерий фредгольмовости, формула индекса.

1. Введение. Рассмотрим на ориентируемой кусочно ляпуновской кривой Γ (возможно неограниченной) сингулярный оператор Коши

$$(K\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}, \quad t_0 \in \Gamma, \tag{1.1}$$

где функция $(1+|t|)^{-1}\varphi(t)$ суммируема и интеграл понимается в смысле главного значения как предел при $\varepsilon \to 0$ интегралов по кривым $\{t \in \Gamma,\ |t-t_0| \geq \varepsilon\}$. Сингулярным интегральным уравнениям

$$a(\varphi + K\varphi) + b(\varphi - K\varphi) = \psi \tag{1.2}$$

с кусочно непрерывными коэффициентами a, b посвящены многочисленные исследования. В основном они относятся к случаю, когда кривая Γ ограничена или, как говорят, конечна. Для скалярных функций и кусочно гёльдеровых коэффициентов эти уравнения тесно связаны с задачей линейного сопряжения для аналитических функций, связь между ними осуществляется интегралами типа Коши и формулами Сохоцкого — Племеля для последних. С помощью так называемых канонических функций задача линейного сопряжения допускает эффективное решение, что обусловило и решение в явном виде уравнений вида

(1.2). В ситуации, когда Γ является гладким контуром, а коэффициенты непрерывны, этот подход был развит Ф. Д. Гаховым [1]. Теория этих краевых задач для кусочно гёльдеровых коэффициентов на общей кусочно гладкой кривой была построена в трудах грузинской математической школы, основоположниками которой являются Н. И. Мусхелишвили и И. Н. Векуа. Прекрасное изложение этой теории содержится в монографии Н. И. Мусхелишвили [2]. Позднее она была распространена на весовые L^p-пространства Б. В. Хведелидзе [3]. В случае вектор-функций φ и матричных коэффициентов a, b ситуация усложняется, поскольку явного выражения для канонических матриц-функций получить не удается. К тому же их построение само опирается на теорию систем уравнений (1). Исключение составляет случай кусочно гёльдеровых коэффициентов на гладких контурах, подробно изученный И. Н. Векуа [4].

Различные подходы в векторной ситуации на общей кусочно ляпуновской кривой развивались И. Б. Симоненко [5, 6] в рамках предложенного им локального принципа (для задачи линейного сопряжения с матричным коэффициентом), а также И. Ц. Гохбергом и Н. Е. Крупником [7]. Главная неприятность, связанная с кусочно непрерывными коэффициентами (особенно в векторном случае), состоит в том, что операторы

$$aK - Ka, \quad K^2 - 1, \quad K + \overline{K} \tag{1.3}$$

являются некомпактными. Здесь черта над K означает операторную инволюцию комплексного сопряжения, определяемая равенством $\overline{K}\varphi = \overline{(K\overline{\varphi})}$, где черта справа означает комплексное сопряжение функций. В этой связи И. Ц. Гохбергом и Н. Е. Крупником изучалась алгебра, порожденная операторами умножения a и сингулярным оператором Коши K, для элементов которой были получены критерий фредгольмовости в весовых пространствах и формула индекса.

Другой подход, предложенный автором [8], состоит в том, чтобы расширить эту алгебру, включив в нее операторы

$$2N = a(1 + K) + b(1 - K) + 2N^0, \tag{1.4}$$

где N^0 являются так называемыми операторами типа Винера — Хопфа. К ним, в частности, относятся и операторы вида (1.2), а также операторы, возникающих в многочисленных работах по краевым задачам в областях с кусочно-гладкой границей (см. например, [9–13] и др.). Различные классы операторов вида (1.4) изучались также Р. Дудучава [14, 15].

Во всех перечисленных работах сингулярные интегральные уравнения рассматривались на кусочно ляпуновских кривых, лежащих в конечной части плоскости или, как говорят, на конечных кривых. В данной статье эти исследования распространены на случай, когда кусочно ляпуновская кривая может быть бесконечной и включать в число узлов бесконечно удаленную точку, что особенно важно для приложений.

2. Кусочно-ляпуновские кривые. Опишем необходимые построения, связанные с кусочно ляпуновскими кривыми. Напомним, что обычное условие

Гёльдера
$$|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)| \leq C|z_1 - z_2|^\nu, \quad z_j \in G, \tag{2.1}$$
вместе с требованием ограниченности функции φ на замкнутом множестве G комплексной плоскости $\mathbb{C}$ (в случае, когда оно неограниченное) определяет пространство $C^\nu(G)$. Относительно соответствующей нормы
$$|\varphi| = \sup_z |\varphi(z)| + \sup_{z_1 \neq z_2} \frac{|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)|}{|z_1 - z_2|^\nu}$$
оно банахово и обозначается через $C^\nu(G)$.

Если отказаться от ограниченности φ, то условие (2.1) допускает рост $\varphi(z) = O(|z|^\nu)$ на бесконечности. Ограниченные функции, удовлетворяющие этому условию, могут осциллировать на бесконечности, как, например, функция $\sin t \in C^\nu(\mathbb{R})$.

В этой связи в классических монографиях [1, 2], посвященных сингулярным интегральным уравнениям, рассматривают модифицированное условие Гёльдера
$$|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)| \leq C \frac{|z_1 - z_2|^\nu}{(1 + |z_1|)^\nu (1 + |z_2|)^\nu}, \quad z_j \in G. \tag{2.2}$$
В случае ограниченного множества G это условие, очевидно, равносильно (2.1). Для неограниченных множеств оно гарантирует существование предела $\varphi(\infty) = \lim \varphi(z)$ при $z \to \infty$. Пространство функций, удовлетворяющих этому условию, обозначим через $\underline{C}^\nu(G)$. Относительно нормы
$$|\varphi| = \sup_z |\varphi(z)| + \sup_{z_1 \neq z_2} \frac{(1 + |z_1|)^\nu (1 + |z_2|)^\nu |\varphi(z_1) - \varphi(z_2)|}{|z_1 - z_2|^\nu}$$
оно банахово. Если множество G рассматривать на сфере Римана $\underline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, отождествляемой со сферой в $\mathbb{R}^3$ и снабженной евклидовой метрикой, то $\underline{C}^\nu$ совпадает с пространством C^ν, определяемым по отношению к этой метрике. Можно также это пространство описать свойством его инвариантности относительно дробно-линейных преобразований плоскости. Это свойство положим в основу описания и классов гладких дуг на сфере Римана.

Напомним определение гладкой дуги. Пусть комплекснозначная функция $\delta_0 \in C^1(I_0)$, заданная на конечном отрезке $I_0 = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, такова, что $\delta_0'(t) \neq 0$, $t \in I_0$, и равенство $\delta_0(t_1) = \delta_0(t_2)$, $t_1 \neq t_2$, возможно только для $t_1 = a$, $t_2 = b$. Тогда образ $\Gamma_0 = \delta_0(I_0)$ этой функции есть (конечная) гладкая дуга класса $C^{1,\nu}$ с концами $\delta_0(a)$ и $\delta_0(b)$, разомкнутая или сомкнутая. Функция δ_0 называется ее *гладкой параметризацией.*

Пусть ω_1 и ω_2 — дробно-линейные преобразования, причем ω_1 переводит отрезок I_0 в произвольный интервал $I = \omega_1(I_0)$ расширенной прямой $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$, а функция ω_2 может обращаться в бесконечность только на концах дуги Γ_0. Тогда $\Gamma = \omega_2(\Gamma_0)$ есть гладкая дуга на сфере Римана (конечная или бесконечная) и функция $\delta = \omega_2 \circ \delta_0 \circ \omega_1^{-1} : I \to \Gamma$ есть ее гладкая параметризация. Заметим, что бесконечно удаленная точка не может лежать внутри дуги Γ.

По определению Γ и δ принадлежат классу $\underline{C}^{1,\nu}$, если $\delta_0 \in C^{1,\nu}(I_0)$. В дальнейшем обозначения с нижней чертой используются как для конечных, так и бесконечных кривых, в то время как обозначения без черты относятся только к конечным кривым.

Проиллюстрируем введенное понятие на следующем примере. Пусть функция $\delta \in C^1(\mathbb{R}_+)$ взаимно однозначна и $\delta'(t) \neq 0$, $t \geq 0$, причем существует конечный ненулевой предел $\delta'(\infty) = \lim \delta'(t)$ при $t \to \infty$. Тогда δ есть гладкая параметризация бесконечной дуги $\Gamma = \delta(\mathbb{R}_+)$. Если $\delta' \in \underline{C}^{\nu}(\mathbb{R}_+)$, то Γ принадлежит классу $\underline{C}^{1,\nu}$.

Кривая называется Γ *кусочно ляпуновской*, если ее можно представить в виде объединения конечного числа ляпуновских дуг, которые попарно могут пересекаться только по своим концам. Пусть конечное множество $F \subseteq \Gamma$ таково, что кривая $\Gamma \setminus F$ гладкая. Тогда каждая компонента $\Gamma \setminus F$ гомеоморфна открытому интервалу либо окружности. Заметим, что в случае бесконечной кривой бесконечно удаленная точка ∞ включается в состав F. Неотрицательные числа m и $\overline{m} \geq m$ могут принимать любые значения. Например, если Γ состоит из двух пересекающихся прямых (в точке τ), то $m = \overline{m} = 4$, $F = \{\tau, \infty\}$ (с бесконечными разомкнутыми дугами — компонентами). Если эти прямые параллельны, то $m = \overline{m} = 4$, $F = \{\infty\}$ (с бесконечными сомкнутыми дугами — компонентами).

В общем случае можем записать

$$\Gamma \setminus F = \dot{\Gamma}_1 \cup \ldots \cup \dot{\Gamma}_m \cup \Gamma_{m+1} \cup \ldots \cup \Gamma_{\overline{m}}, \tag{2.3}$$

где $\dot{\Gamma}_j$, $j \leq m$, означает гладкую дугу Γ_j без своих концов, Γ_j, $j \geq m+1$, являются простыми гладкими контурами и все множества в этом разложении попарно не пересекаются, причем $\Gamma_i \cap \Gamma_j$, $i \leq m < j$. Кривые Γ_j при $j \leq m$ ($j \geq m+1$) называем составными компонентами- дугами (компонентами-контурами). Объединение Γ_j по $j \leq m$ ($j \geq m+1$) образует составную дугу Γ_{arc} (составной контур Γ_{cont}), которые не пересекаются: $\Gamma_{arc} \cap \Gamma_{cont} = \varnothing$. Если все дуги Γ_j и контур Γ_{cont} принадлежат соответственно $\underline{C}^{1,\nu}$ и $C^{1,\nu}$, то говорим, что (Γ, F) *принадлежит классу* $\underline{C}^{1,\nu}$. Точки $\tau \in F$ называются *узлами.*

В окрестности узлов

$$B_\tau(\varrho) = \begin{cases} \{|z-\tau| \leq \varrho\}, & \tau \neq \infty, \\ \{|z| \geq 1/\varrho\}, & \tau = \infty, \end{cases}$$

где ϱ достаточно мало, кривая $\Gamma_\tau = \Gamma \cap B_\tau(\varrho)$ распадается на конечное число гладких дуг $\Gamma_{\tau,j}$, $1 \leq j \leq n_\tau$, с общим концом в τ:

$$\Gamma_\tau = \Gamma \cap B_\tau(\varrho) = \bigcup_1^{n_\tau} \Gamma_{\tau,j}, \quad \Gamma_F = \bigcup_\tau \Gamma_\tau. \tag{2.4}$$

Дуги $\Gamma_{\tau,j}$ называем *концевыми.* Каждая дуга — компонента Γ_j содержит две концевые дуги, конечную гладкую дугу между ними обозначим Γ'_j. Таким образом,

$$\Gamma = \Gamma_F \cup \Gamma', \quad \Gamma' = \Gamma'_1 \cup \ldots \cup \Gamma'_m \cup \Gamma_{m+1} \cup \ldots \cup \Gamma_{\overline{m}} \tag{2.5}$$

с прерывистой гладкой кривой Γ' класса $C^{1,\nu}$.

Все составные компоненты кривой предполагаются ориентируемыми, так что каждая концевая дуга $\Gamma_{\tau,j}$ является либо исходящей (выходит из точки τ), либо входящей (входит в эту точку). Соответственно этому можно ввести сигнатуру ориентации

$$\varepsilon_{\tau,k} = \begin{cases} \pm 1, & \Gamma_{\tau,k} \text{ исходящая,} \\ \mp 1, & \Gamma_{\tau,k} \text{ входящая,} \end{cases} \tag{2.6}$$

где верхний (нижний) знак отвечает $\tau \neq \infty$ $(\tau = \infty)$.

3. Весовые L^p- и C^μ-пространства. Семейство вещественных чисел $\lambda = (\lambda_\tau, \tau \in F)$ называем *весовым порядком.* Он принадлежит $\mathbb{R}$, если все числа λ_τ совпадают. Весовая функция ρ_λ порядка λ есть гладкая положительная функция на $\Gamma \setminus F$, сужение которой на концевые дуги

$$\rho_\lambda(t) = \begin{cases} |t-\tau|^{\lambda_\tau}, & \tau \neq \infty, \\ |t|^{\lambda_\tau}, & \tau = \infty, \end{cases} \quad t \in \Gamma_F. \tag{3.1}$$

Пространство $L^p_\lambda(\Gamma, F)$, $1 \leq p < \infty$, определяется конечной нормой

$$|\varphi| = \left(\int_\Gamma |\varphi(t)|^p \rho_{-\lambda p - 1}(t)\, d_1 t \right)^{1/p}. \tag{3.2}$$

Заметим, что $L^p_\lambda = \rho_\lambda L^p_0$ и $L^p_0(\Gamma, F)$ является L^p-пространством относительно меры $\rho_{-1} d_1 t$. Очевидно, функция $(1+|t|)^{-1}\varphi(t)$ суммируема на Γ тогда и только тогда, когда

$$\varphi \in L^p_\lambda(\Gamma, F), \quad -1 < \lambda < 0, \tag{3.3}$$

поэтому сингулярный оператор Коши (1.1) естественно рассматривать для функций, удовлетворяющих этому условию.

Обычно [1, 2] вводится весовое пространство $L^p(\Gamma, \rho_\alpha)$ с помощью нормы

$$|\varphi| = \left(\int_\Gamma |\varphi(t)|^p \rho_\alpha(t)\, d_1 t) \right)^{1/p},$$

так что при $\alpha = -\lambda p - 1$ оно совпадает с L^p_λ. Важно заметить, что в условии (3.3) суммируемости функций на Γ весовой порядок λ не зависит от p, в то время как в рамках пространств $L^p(\Gamma, \rho_\alpha)$ это условие принимает вид

$$\varphi \in L^p(\Gamma, \rho_\alpha), \quad 0 < \alpha + 1 < p,$$

зависящий от p. В этом, в частности, состоит достоинство принятого определения (3.2) весового пространства.

По определению пространство $C^\mu_0(\Gamma, F)$, $0 < \mu < \nu$, состоит из всех ограниченных функций φ на $\Gamma \setminus F$, для которых $\rho_\mu \varphi$ удовлетворяет условию Гёльдера

$$|(\rho_\mu \varphi)(t_1) - (\rho_\mu \varphi)(t_2)| \leq C|t_1 - t_2|^\mu.$$

Соответственно весовое пространство $C^{\mu}_{\lambda}(\Gamma,F) = \rho_{\lambda} C^{\mu}_0(\Gamma,F)$. В частности, функция $(1+|t|)^{-1}\varphi(t)$ суммируема на Γ, если $\varphi \in C^{\mu}_{\lambda}(\Gamma,F)$, $-1<\lambda<0$. Свойства этих пространств подробно изучены в [16]. Отметим только, что семейства банаховых пространств L^p_{λ} и C^{μ}_{λ} монотонно убывают (в смысле вложений) по каждому из параметров λ_{τ}, а последнее семейство — и по μ.

Пространство $C(\Gamma,F)$ кусочно непрерывных функций на Γ состоит из всех $a(t) \in C(\Gamma \setminus F)$, которые на концевых дугах $a \in C(\Gamma_{\tau,k})$, $\tau \in F$, $1 \le k \le n_{\tau}$. Односторонние предельные значения этих функций в узлах обозначаем через

$$\widehat{a}_{\tau,k} = \lim a(t) \quad \text{при } t \to \tau,\ t \in \Gamma_{\tau,k}. \tag{3.4}$$

Аналогичным образом при $\mu<\nu<1$ введем пространство $\underline{C}^{\nu}(\Gamma,F)$. Оно состоит из всех функций $a(t) \in C(\Gamma \setminus F)$, которые в обозначениях (2.4), (2.5) удовлетворяют условиям

$$a \in \begin{cases} C^{\nu}(\Gamma_{\tau,k}), & \tau \ne \infty, \\ \underline{C}^{\nu}(\Gamma_{\tau,k}), & \tau = \infty, \end{cases} \quad \varphi \in C^{\nu}(\Gamma').$$

Эти пространства являются банаховыми алгебрами по умножению.

С каждой точкой $t_0 \in \Gamma \setminus F$ свяжем единичный касательный вектор $e(t_0)$, направленный в соответствии с выбранной ориентацией кривой. В явном виде

$$e(t_0) = \lim_{t \to t_0+0} \frac{t-t_0}{|t-t_0|}, \tag{3.5}$$

где запись $t \to t_0+0$ означает, что точка $t \in \Gamma$ стремится к t_0, оставаясь справа от t_0 (по отношению к ориентации кривой).

Нетрудно видеть, что полученная функция e кусочно непрерывна, т. е. принадлежит $C(\Gamma,F)$. При этом $e \in \underline{C}^{\nu}(\Gamma,F)$ тогда и только тогда, когда $\Gamma \in \underline{C}^{1,\nu}$. Из определения (2.6) сигнатуры ориентации и (3.4) видно, что единичные касательные векторы

$$q_{\tau,k} = \begin{cases} \varepsilon_{\tau,k}\widehat{e}_{\tau,k}, & \tau \ne \infty, \\ \varepsilon_{\tau,k}\widehat{e}_{\tau,k}, & \tau = \infty, \end{cases} \tag{3.6}$$

в точке τ «выходят» из этой точки.

По определению узел τ не является точкой возврата кривой Γ, если $q_{\tau,k} \ne q_{\tau,j}$ при $k \ne j$.

4. Мультипликативная свертка. Рассмотрим пространство $L^p_{\lambda}(\mathbb{R}_+;0,\infty)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, которое, очевидно, можно описать условиями $L^p_{\lambda} = t^{\lambda} L^p_0$, и

$$L^p_0(\mathbb{R}_+;0,\infty) = \{\varphi(t) = \widetilde{\varphi}(e^t),\ \widetilde{\varphi} \in L^p(\mathbb{R})\}.$$

Аналогично для пространства $C^{\mu}_{\lambda}(\mathbb{R}_+;0,\infty)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, имеем $C^{\mu}_{\lambda} = t^{\lambda} C^{\mu}_0$, и

$$C^{\mu}_0(\mathbb{R}_+;0,\infty) = \{\varphi(t) = \widetilde{\varphi}(e^t),\ \widetilde{\varphi} \in C^{\mu}(\mathbb{R})\}.$$

Эти пространства обозначаем через $L^p\{\lambda\}$ и $C^{\mu}\{\lambda\}$ соответственно. В частности, $C^{\nu}\{0\}$ состоит из всех функций $a(t) = \widetilde{a}(e^t)$, $\widetilde{a} \in C^{\nu}(\mathbb{R})$. По аналогии с этим введем также класс $C^\nu\{0\times 0\}$ функций $a(t_0,t)=\widetilde{a}(e^{t_0},e^t)$ двух переменных $t_0,t>0$, для которых $\widetilde{a}\in C^\nu(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$. Очевидно, функции этого класса принадлежат $C^\nu\{0\}$ по одной переменной равномерно по другой. Аналогичный смысл имеют классы $C\{0\}$ и $C\{0\times 0\}$ всех непрерывных и ограниченных функций. В противоположность этому класс $\underline{C}\{0\}$ состоит из непрерывных функций на полуоси $\mathbb{R}_+$, допускающих пределы на ее концах 0 и ∞. Очевидно, он содержит класс $C^\nu\{0\}=\underline{C}^\nu(\mathbb{R}_+)$, который переходит в $C^\nu[0,1]$ при подстановке $t\to t/(1+t)$, переводящей полуось на отрезок $[0,1]$. Как и выше, классы $\underline{C}\{0\times 0\}$ и $\underline{C}^\nu\{0\times 0\}$ определяются принадлежностью соответствующим классам по одной переменной равномерно по другой.

Введем мультипликативную свертку на полуоси по формуле

$$(f\diamond\varphi)(t_0)=\int\limits_0^\infty f\left(\frac{t_0}{t}\right)\varphi(t)\frac{dt}{t},\quad t_0>0.$$

В силу очевидной связи этого определения с обычной сверткой имеем оценки

$$|f\diamond\varphi|_{L^p\{\lambda\}}\le|f|_{L^1\{\lambda\}}|\varphi|_{L^p\{\lambda\}},\quad |f\diamond\varphi|_{C^\mu\{\lambda\}}\le|f|_{L^1\{\lambda\}}|\varphi|_{C^\mu\{\lambda\}}.\tag{4.1}$$

В частности, $L^1\{\lambda\}$ есть банахова алгебра относительно этой свертки и оператор $R(f)\varphi=f\diamond\varphi$, $f\in L^1\{\lambda\}$, ограничен в $L^p\{\lambda\}$ и $C^\mu\{\lambda\}$.

Нетрудно видеть, что эти оценки распространяются и на интегральный оператор типа свертки

$$(N\varphi)(t_0)=\int\limits_0^\infty a(t_0,t)f\left(\frac{t_0}{t}\right)\varphi(t)\frac{dt}{t},\quad t_0>0,\tag{4.2}$$

где функция $a(t_0,t)$ двух переменных $t_0,t>0$ непрерывна и ограничена, т. е. принадлежит классу $C\{0\times 0\}$. Более точно, этот оператор ограничен в пространстве $L^p\{\lambda\}$. Если дополнительно $a\in C^\mu\{0\times 0\}$, то он ограничен и в пространстве $C^\mu\{0\}$. Для вывода различных операторных соотношений большую роль играет следующая лемма, описывающая условия компактности N.

Лемма 4.1. *Пусть $f\in L^1\{\lambda\}$ и функция $a(t_0,t)\in C\{0\times 0\}$ в каждом секторе $\{\delta<t_0/t<\delta^{-1}\}$ допускает нулевые пределы*

$$\lim_{t+t_0\to 0}a(t_0,t)=\lim_{t+t_0\to\infty}a(t_0,t)=0.\tag{4.3}$$

Тогда оператор N в (4.2) компактен в пространстве $L^p\{\lambda\}$. Если дополнительно $a\in C^\nu\{0\times 0\}$, то N компактен и в пространстве $C^\mu\{\lambda\}$, $0<\mu<\nu$.

В дальнейшем используются следующие обозначения. Банахову алгебру $\mathscr{L}(X)$ всех ограниченных в банаховом пространстве операторов обозначим через $\mathscr{L}(X)$. Ее подалгебра компактных операторов обозначается через $\mathscr{T}(X)$, она является ее замкнутым двусторонним идеалом. Соотношение $N_1\sim N_2$ для N_1,N_2 означает равенство по модулю $\mathscr{T}(X)$, т. е. компактность оператора N_1-N_2.

Лемма 1 особенно полезна в следующей ситуации.

Лемма 4.2. *Пусть $a, b \in C\{0 \times 0\}$, причем все значения функции b, включая ее предельные значения, положительны. Пусть функция $f \in C^1(\mathbb{R}_+)$ тождественно равна нулю в окрестности $t = 0$ и $t = \infty$, так что функции $f_0(t) = f[b(0,0)t]$ и $f_1(t) = f[b(\infty,\infty)t]$ принадлежат $L^1\{\lambda\}$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}$. Пусть, наконец, гладкая функция χ на полуоси $\mathbb{R}_+$ тождественно равна 1 (0) в окрестности $t = 0$ ($t = \infty$) и $\chi_*(t) = \chi(1/t)$.*

Тогда оператор

$$(N\varphi)(t_0) = \int_0^\infty a(t_0,t) f\left[b(t_0,t)\frac{t_0}{t}\right]\varphi(t)\frac{dt}{t}, \quad t_0 > 0, \tag{4.4}$$

ограничен в пространстве $L^p\{\lambda\}$ и имеет место соотношение

$$N \sim a(0,0)\chi R(f_0) + a(\infty,\infty)\chi_* R(f_1). \tag{4.5}$$

Если дополнительно $a, b \in C^\nu(0 \times 0)$, то это соотношение справедливо и по модулю $\mathscr{T}(C^\mu\{\lambda\})$.

Следующая лемма показывает, что при $f \neq 0$ оператор свертки $R(f)$ не может быть компактным.

Лемма 4.3. *Пусть в обозначениях леммы 2 оператор $\chi R(f)$, $f \in L^1\{\lambda\}$, компактен в одном из пространств $L^p\{\lambda\}, C^\mu\{\lambda\}$.*

Тогда $f = 0$. Аналогичным свойством обладает и оператор $\chi_* R(f)$.

Доказательство лемм 1 и 3 приведено в [8], лемма 2 является достаточно простым следствием леммы 1.

Рассмотрим так называемое «ядро Коши»

$$k(t) = \frac{1}{\pi i(1-t)}, \quad t > 0, \tag{4.6}$$

отвечающий ему оператор $R(k)$ представляет собой сингулярный оператор Коши K на полуоси $\mathbb{R}_+$, т. е. действует по формуле (1.1) на $\Gamma = \mathbb{R}_+$.

Как показано в [16], при $-1 < \lambda < 0$ этот оператор ограничен в пространствах $L^p\{\lambda\}$ и $C^\mu\{\lambda\}$. Чтобы охватить все весовые порядки λ, введем усеченное ядро Коши

$$s(t) = s_0(t)k(t), \quad s(t) \in C_0^\infty(0,\infty), \ s_0(1) = 1. \tag{4.7}$$

Удобно считать функцию s_0 вещественной, подчиненной условию $s_0(1/t) = ts_0(t)$, так что $s(1/t) = -s(t)$.

Как и в [8], лемма 1 допускает аналог и для «сингулярной» функции $f = s$.

Лемма 4.4. *Пусть $a(t_0,t) \in C^\nu\{0 \times 0\}$ и оператор N определяется равенством (4.2), где роль f играет функция s.*

Тогда этот оператор ограничен в пространствах $L^p_{\lambda_1,\lambda_2}(\mathbb{R}_+; 0,\infty)$, $1 < p < \infty$, и $C^\mu_{\lambda_1,\lambda_2}(\mathbb{R}_+; 0,\infty)$, $0 < \mu < \nu$, для любых λ_1, λ_2.

Если дополнительно функция $a(t_0, t)$ удовлетворяет условию (4.3) и тождественно равна нулю при $t = t_0$, то оператор N компактен.

К сожалению, существуют [17] функции $f \in L^1\{\lambda\}$, для которых сингулярная свертка $R(s)f = s \diamond f$ не принадлежит $L^1\{\lambda\}$. В этой связи в $L^1\{\lambda\}$ выделим подалгебру $L^{(1)}\{\lambda\}$, элементы которой локально суммируемы с некоторой степенью $q > 1$. С этой целью заметим, что пространство $L^1\{\lambda\}$ можно определить с помощью эквивалентной нормы

$$|f| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-k\lambda} \int\limits_1^2 |f(2^k t)|\, dt.$$

Соответственно этому введем пространство $L^{1,q}\{\lambda\}$ условием конечности нормы

$$|f| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-k\lambda} \int\limits_1^2 |f(2^k t)|\, dt,$$

относительно которой оно банахово. Как показано в [8], имеют место оценки

$$|f \diamond g|_{L^{1,q}\{\lambda\}} \le C|f|_{L^{1,q}\{\lambda\}}|g|_{L^1\{\lambda\}}, \quad |s \diamond f|_{C^\mu\{\lambda\}} \le C|f|_{L^{1,q}\{\lambda\}}, \tag{4.8}$$

где постоянная $C > 0$ зависит только от $q > 1$.

Следовательно,

$$L^{(1)}\{\lambda\} = \bigcup_{q>1} L^{1,q}\{\lambda\}$$

является сверточной подалгеброй $L^1\{\lambda\}$, инвариантной относительно оператора $R(s)$. При этом она является двусторонним идеалом $L^1\{\lambda\}$ в том смысле, что $f \diamond g \in L^{(1)}\{\lambda\}$ для любых $f \in L^{(1)}\{\lambda\}$ и $g \in L^1\{\lambda\}$.

Пусть $C(\lambda)$ означает банахову алгебру всех ограниченных и непрерывных функций $x(\zeta)$ на прямой $\operatorname{Re}\zeta = \lambda$ (с поточечными операциями и sup-нормой) и ее подалгебра $C^0(\lambda)$ определяется условием $x(\zeta) \to 0$ при $\zeta \to \infty$.

Рассмотрим преобразование Меллина

$$(Mf)(\zeta) = \int\limits_0^\infty t^{-\zeta-1} f(t)dt, \quad \operatorname{Re}\zeta = \lambda, \tag{4.9}$$

как известно, оно является взаимно однозначным непрерывным гомоморфизмом банаховых алгебр $L^1\{\lambda\} \to C^0(\lambda)$. Образ $L^{(1)}\{\lambda\}$ при этом гомоморфизме обозначим через $\mathscr{M}^0(\lambda)$.

Преобразование Меллина можно рассматривать для ядра Коши (4.6), понимая интеграл как сингулярный. Этот интеграл табличный [18] и дается формулой

$$(Mk)(\zeta) = -i \operatorname{ctg} \pi\zeta, \quad -1 < \operatorname{Re}\zeta < 0. \tag{4.10}$$

Нужно только принять во внимание, что интеграл (4.9) отличается от классического определения преобразования Меллина знаком при ζ под интегралом.

Аналогично можно ввести и преобразование Ms для усеченного ядра Коши (4.7), которое представляет собой аналитическую на всей плоскости функцию, для которой

$$(Ms)(\zeta) \to \pm 1 \quad \text{при } \operatorname{Im}\zeta \to \pm\infty, \operatorname{Re}\zeta = \lambda. \tag{4.11}$$

Заметим, что аналогичное свойство для ядра Коши следует непосредственно из (4.10). Кроме того, имеет место соотношение

$$(Ms)^2 - 1 = Ms_1, \quad s_1 \in C_0^\infty(0,\infty). \tag{4.12}$$

Аналогично (4.10) к табличным интегралам [18] относится и функция $f(t) = (1+wt)^{-1}$, где комплексное число w не лежит на отрицательной полуоси. Преобразование Меллина этой функции, деленной на πi, дается формулой

$$\left[M\left(\frac{1}{\pi i}\frac{1}{1+wt}\right)\right](\zeta) = \frac{w^\zeta}{i\sin\pi\zeta}, \quad -1 < \zeta < 0, \tag{4.13}$$

где степенная функция определяется выбором аргумента $|\arg w| < \pi$.

Функцию $x \in C(\lambda)$ назовем $L^{(1)}$-*мультипликатором*, если $x(\zeta)y(\zeta) \in \mathscr{M}^0(\lambda)$ для всех $y \in \mathscr{M}^0(\lambda)$. Эти функции образуют подалгебру $\mathscr{M}(\lambda) \subseteq C(\lambda)$. Поскольку $M(s \diamond f) = (Ms)(Mf)$, $f \in L^{(1)}\{\lambda\}$, примером $L^{(1)}$-мультипликатора служит функция Ms. При $-1 < \lambda < 0$ таким мультипликатором является и функция Mk, поскольку разность $k - s$ принадлежит $L^{(1)}(\lambda)$.

5. Операторы типа Винера — Хопфа. Обратимся к кусочно ляпуновской кривой Γ класса $\underline{C}^{1,\nu}$. Пусть $L^p_\lambda(\Gamma, F)$, $1 < p < \infty$, состоит из l-вектор-функций, а $C(\Gamma, F)$ — алгебра кусочно непрерывных $l \times l$-матриц-функций. Последние рассматриваем как операторы умножения $\varphi \to a\varphi$. Аналогичный смысл имеют банаховы пространство $C^\mu_\lambda(\Gamma, F)$, $0 < \mu < \nu$, и алгебра $\underline{C}^\nu(\Gamma, F)$, $\mu < \nu < 1$.

Пусть функция $\chi(t) \in C^1(\mathbb{R}_+)$ тождественно равна 1 в точке $t = 0$ и нулю при $t \geq \varrho$, где достаточно малое число $\varrho < 1$ фигурирует в (5). Как и в лемме 2, положим $\chi_*(t) = \chi(1/t)$, так что $\chi_*(t) \equiv 1$ в окрестности бесконечности и $\chi_*(t) = 0$, $t \leq 1/\varrho$.

Введем гладкие параметризации класса $\underline{C}^{1,\nu}$ концевых дуг в (2.4), определенных на различных интервалах в зависимости от типа дуги:

$$\gamma_{\tau,k} : \begin{cases} I \to \Gamma_{\tau,k}, & \tau \neq \infty, \\ I_* \to \Gamma_{\tau,k}, & \tau = \infty, \end{cases} \in \underline{C}^{1,\nu},$$

где $I = [0, \varrho]$, $I_* = [1/\varrho, \infty]$, причем $|\gamma'_{\tau,k}(0)| = 1$, $\tau \neq \infty$ и $|\gamma'_{\tau,k}(\infty)| = 1$, $\tau = \infty$.

Исходя из семейства $f = (f_\tau, \tau \in F)$ матриц-функций $f_\tau = (f_{\tau,jk})_1^{n_\tau} \in L^{(1)}\{\lambda_\tau\}$, элементы которых сами являются $l\times$)-матрицами-функциями, введем так называемый *оператор типа Винера — Хопфа* $W(f)$. По определению сужение функции $W(f)\varphi$ на Γ_F определяется равенством

$$[W(f)\varphi] \circ \gamma_{\tau,k} = \begin{cases} \sum\limits_{1 \leq r \leq n_\tau} [\chi R(f_{kr})\chi](\varphi \circ \gamma_{\tau,r}), & \tau \neq \infty, \\ \sum\limits_{1 \leq r \leq n_\tau} [\chi_* R(f_{kr})\chi_*](\varphi \circ \gamma_{\tau,r}), & \tau = \infty, \end{cases} \quad 1 \leq k \leq n_\tau,$$

а сужение $W(f)\varphi$ на $\Gamma \setminus \Gamma_F$ равно нулю.

С оператором $N \in \mathscr{L}[L^p_\lambda(\Gamma, F)]$ удобно связать семейство $N_\tau = (N_{\tau,kj},\ 1 \le k, j \le n_\tau)$, операторов, действующих на I, если $\tau \ne \infty$, и на I_*, если $\tau = \infty$, по формуле

$$N_{\tau,kj}\psi = (N\varphi_j) \circ \gamma_k, \tag{5.1}$$

где функция φ_j определяется условиями $\varphi_j \circ \gamma_j = \psi$ и $\varphi_j = 0$ вне $\Gamma_{\tau,j}$. Очевидно, для $N \in \mathscr{L}[L^p_\lambda(\Gamma, F)]$ имеем

$$N_{\tau,kj} \in \begin{cases} \mathscr{L}[L^p_{\lambda_\tau}(I, 0)], & \tau \ne \infty, \\ \mathscr{L}[L^p_{\lambda_\tau}(I_*, 0)], & \tau = \infty, \end{cases} \quad 1 \le k, j \le n_\tau.$$

Аналогичный факт справедлив и для операторов $N \in \mathscr{L}[C^\mu_\lambda(\Gamma, F)]$ с той разницей, что операторы $N_{\tau,kj}$ действуют в соответствующих пространствах функций $\{\psi \in C^\mu_{\lambda_\tau}(I, 0),\ \psi(\varrho) = 0\}$ при $\tau \ne \infty$ и $\{\psi \in C^\mu_{\lambda_\tau}(I_*, \infty),\ \psi(1/\varrho) = 0\}$ при $\tau = \infty$.

Условимся также в следующей терминологии. Пусть Γ разбита на попарно не пересекающиеся кривые Γ_i, $1 \le i \le n$, и оператор N действует в некотором пространстве $X(\Gamma)$ функций, заданных на Γ. Если этот оператор инвариантен в каждом из подпространств $X_i(\Gamma) = \{\varphi \in X,\ \varphi = 0 \text{ вне } \Gamma_i\}$, то говорим, что N действует вдоль каждой кривой Γ_i. В этом случае сужение N на X_i обозначим через $N|\Gamma_i$. Очевидно, этот оператор можно отождествить с оператором, действующим в соответствующем пространстве $X(\Gamma_i)$ функций на Γ_i. Ясно, что класс операторов этого типа образует алгебру, причем $(MN)|\Gamma_i = (M|\Gamma_i)(N|\Gamma_i)$.

В принятой терминологии оператор $W(f)$ можно определить следующим образом: этот оператор действует вдоль кривых Γ_τ, $\tau \in F$, и $\Gamma \setminus \Gamma_F$, причем

$$[W(f)]_\tau = \begin{cases} \chi R(f_\tau)\chi, & \tau \ne \infty, \\ \chi_* R(f_\tau)\chi_*, & \tau = \infty, \end{cases} \quad [W(f)]|(\Gamma \setminus \Gamma_F) = 0. \tag{5.2}$$

Очевидно, этот оператор ограничен в каждом из пространств $L^p_\lambda(\Gamma, F)$, $C^\mu_\lambda(\Gamma, F)$ и $[W(f)W(g)]_\tau = [W(f)]_\tau[W(g)]_\tau$. Поэтому на основании лемм 2 и 3 отсюда приходим к соотношениям

$$W(f)W(g) \sim W(f \diamond g), \quad W(f) \sim 0 \Leftrightarrow f = 0, \tag{5.3}$$

где, напомним, эквивалентность $N_1 \sim N_2$ означает, что оператор $N_1 - N_2$ компактен в соответствующих пространствах L^p_λ и C^μ_λ.

Класс операторов $N \sim W(f)$ для всех указанных семейств матриц-функций $f = (f_\tau, \tau \in F)$ образует алгебру, которую обозначим соответственно через $\mathscr{B}^0(L^p_\lambda)$ и $\mathscr{B}^0(C^\mu_\lambda)$. В силу второго соотношения (5.3) для $N \sim W(f)$ матрица-функция $\widehat{N}_\tau = Mf_\tau \in \mathscr{M}^0(\lambda_\tau)$ определена корректно, ее называем *концевым символом оператора* N *в узле* τ. При этом отображение $N \to \widehat{N}_\tau$ осуществляет гомоморфизм $\mathscr{B}^0(L^p_\lambda) \to \mathscr{M}^0(\lambda_\tau)$, причем $\widehat{N}_\tau = 0$, $\tau \in F$, равносильно $N \sim 0$.

Например, в случае полуоси $\Gamma = \mathbb{R}_+$ оператор свертки $N = R(h)$ с функцией $h \in C^\infty_0(0, \infty)$ принадлежит $\mathscr{B}^0$, точнее, $N \sim W(f)$, где по отношению к точкам $\tau - 0, \infty$ функции $f_\tau = h$, так что его концевой символ $\widehat{N}_\tau = Mh$. Если $h \in L^1_\lambda(\mathbb{R}_=; 0, \infty)$, то из тех же соображений оператор $N = R(h)$ принадлежит каждой из алгебр $\mathscr{B}^0(L^p_\lambda)$ и $\mathscr{B}^0(C^\mu_\lambda)$ с концевым символом $(\widehat{N}_\tau)(\zeta) = Mh(\zeta)$ на прямой $\operatorname{Re}\zeta = \lambda_\tau, \tau = 0, \infty$.

Для практического решения вопроса о принадлежности алгебре $\mathscr{B}^0$ конкретных операторов, ограниченных в пространстве L^p_λ или C^μ_λ, можно воспользоваться следующим критерием, легко вытекающим из определений.

Лемма 5.1. *Пусть*

$$cN \sim Nc \tag{5.4}$$

для любой гладкой на $\Gamma \setminus F$ *функции* c, *тождественно равной постоянной в окрестности узлов* $\tau \in F$, *причем*

$$c_0 N \sim N c_0 \sim 0 \tag{5.5}$$

для любой гладкой функции c_0, *тождественно равной нулю в окрестности узлов.*

Тогда $N \sim W(f)$ *с некоторыми* $n_\tau \times n_\tau$*-матрицами-функциями* $f_\tau \in L^{(1)}(\lambda_\tau)$, *если в обозначениях* (5.1) *для всех* $\tau \in F$ *выполнены соотношения*

$$\chi N_\tau \chi \sim \chi R(f_\tau)\chi, \tau \neq \infty; \quad \chi_* N_\tau \chi_* \sim \chi_* R(f_\tau)\chi_*. \tag{5.6}$$

В качестве примера рассмотрим интегральный оператор

$$(N\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_0^1 \frac{\varphi(t)dt}{t + t_0 - 2tt_0}, \quad 0 < t_0 < 1,$$

действующий на функциях, заданных на отрезке $\Gamma = [0,1]$. Этот оператор встречается во многих работах [19], посвященных уравнениям смешанного типа. С помощью леммы 2 нетрудно убедиться, что при $-1 < \lambda < 0$ он принадлежит каждой из алгебр $\mathscr{B}^0[L^p_\lambda([0,1];0,1)]$ и $\mathscr{B}^0[C^\mu_\lambda([0,1];0,1)]$. При этом с учетом (4.13) его концевой символ, отвечающий концам $\tau = 0$ и $\tau = 1$, дается равенствами

$$\widehat{N}_j(\zeta) = \frac{(-1)^j}{i\sin\pi\zeta}, \quad \operatorname{Re}\zeta = \lambda_j, \quad j = 0, 1.$$

6. Операторы с концевым символом. Понятие концевого символа, введенное выше для операторов типа Винера — Хопфа, распространим на значительно более широкий класс операторов. Именно, оператор $N \in \mathscr{L}(L^p_\lambda)$ имеет концевой символ $x_\tau \in \mathscr{M}(\lambda_\tau)$ в узле $\tau \in F$, если $N^0 N$, $NN^0 \in \mathscr{B}^0(L^p_\lambda)$ для всех $N^0 \in \mathscr{B}^0(L^p_\lambda)$ и

$$(N^0 N)^\wedge_\tau = \widehat{N^0}_\tau x_\tau, \quad (NN^0)^\wedge_\tau = x_\tau \widehat{N^0}_\tau. \tag{6.1}$$

Класс всех операторов, допускающих концевой символ в каждой точке $\tau \in F$, обозначим через $\mathscr{B}(L^p_\lambda)$. Очевидно, он является алгеброй и содержит $\mathscr{B}^0(L^p_\lambda)$ в качестве своего двустороннего идеала. Аналогичный смысл имеет и алгебра $\mathscr{B}(C^\mu_\lambda)$.

Аналог леммы 5.1 справедлив и по отношению к алгебре $\mathscr{B}$.

Лемма 6.1. *Пусть выполнено условие* (5.4) *и существуют такие* $n_\tau \times n_\tau$-*матрицы-функции* $x_\tau \in \mathscr{M}(\lambda_\tau)$, *что для любой скалярной* $f \in C_0^\infty(0,\infty)$ *и всех* $\tau \in F$*выполнены соотношения*

$$\begin{aligned} \chi N_\tau \chi R(f)\chi \sim \chi R(f)\chi N_\tau \chi \sim \chi R(g_\tau)\chi, \quad \tau \neq \infty, \\ \chi_* N_\tau \chi_* R(f)\chi_* \sim \chi_* R(f)\chi_* N_\tau \chi_* \sim \chi_* R(g_\tau)\chi_*, \quad \tau = \infty, \end{aligned} \tag{6.2}$$

где функции g_τ *определяются равенством* $Mg_\tau = (Mf)x_\tau$.

Тогда оператор N *принадлежит* $\mathscr{B}$ *с концевым символом* $\widehat{N} = x$.

Заметим, что матрица-функция $a \in C(\Gamma, F)$ как оператор умножения принадлежит $\mathscr{B}(L^p_\lambda)$ и ее концевой символ в точке τ есть диагональная матрица с элементами $\widehat{a}_{\tau,j}$ вдоль диагонали. Аналогично $a \in \mathscr{B}(C^\mu_\lambda)$ для $a \in \underline{C}^\nu(\Gamma, F)$. В дальнейшем рассмотрение алгебры $\mathscr{B}$ для L^p- и C^μ-случаев будем, как правило, вести параллельно, вводя обозначение $\mathscr{C}(\Gamma, F)$ для соответствующей алгебры кусочно непрерывных $l \times l$-матриц. Другими словами, $\mathscr{C} = C$ в L^p-случае и $\mathscr{C} = \underline{C}^\nu$, $\mu < nu < 1$, в C^μ-случае.

В качестве иллюстрации рассмотрим простейшие сингулярные операторы на полуоси и отрезке.

Лемма 6.2. (a) *Оператор свертки* $N = R(s)$ *на полуоси* $\mathbb{R}_+$ *принадлежит каждой из алгебр* $\mathscr{B}(L^p_\lambda)$, $1 < p < \infty$, *и* $\mathscr{B}(C^\mu_\lambda)$, $0 < \mu < 1$, *с любым* λ *и его концевой символ*

$$\widehat{N}_\tau = Ms, \quad \tau = 0, \infty. \tag{6.3}$$

При этом в обозначениях (4.12) *оператор* $S^2 - 1 = R(s_1)$ *принадлежит* $\mathscr{B}^0$.

Аналогичный факт справедлив и для сингулярного оператора Коши $K = R(k)$ *на полуоси с той разницей, что* $-1 < \lambda < 0$.

(b) *Сингулярный оператор Коши* K *на отрезке* $\Gamma = [0,1]$ *принадлежит каждой из алгебр* $\mathscr{B}(L^p_\lambda)$, $1 < p < \infty$, *и* $\mathscr{B}(C^\mu_\lambda)$, $0 < \mu < 1$, $-1 < \lambda < 0$, *и его концевой символ*

$$\widehat{K}_j(\zeta) = \frac{(-1)^j}{i} \operatorname{ctg} \pi\zeta, \quad \operatorname{Re}\zeta = \lambda_j, \quad j = 0, 1. \tag{6.4}$$

При этом $K^2 - 1 \in \mathscr{B}^0$.

В самом деле, условие (5.4) для рассматриваемых операторов проверяется непосредственно, а соотношения (6.2) легко выводятся с помощью леммы 4.1. Остановимся на последней части утверждения (b). В силу формулы Сохоцкого — Племеля [2] перестановки сингулярных интегралов оператор $K^2 - 1$ действует по формуле

$$[(K^2 - 1)\varphi](t_0) = \frac{1}{(\pi i)^2} \int_0^1 \ln\left[\frac{t_0(1-t)}{t(1-t_0)}\right] \frac{\varphi(t)\,dt}{t - t_0}.$$

Поэтому с помощью леммы 5.1 приходим к соотношению

$$K^2 - 1 \sim W(f), \quad f_0(t) = -f_1(t) = \frac{1}{(\pi i)^2} \frac{\ln t}{1-t},$$

что и доказывает это утверждение. Согласно [18]

$$(Mf_0)(\zeta) = -\frac{1}{\sin^2 \pi\zeta} = (-i \operatorname{ctg} \pi\zeta)^2 - 1,$$

впрочем это равенство легко получить и дифференцированием формулы (4.10). Заметим, что оно согласуется с (6.4) и равенством $(K^2-1)^\wedge = \widehat{K}^2 - 1$.

Обратимся к общей ориентируемой кусочно гладкой кривой $(\Gamma, F) \in \underline{C}^{1,\nu}$. При этом в соответствии с леммой 6.2 начиная с этого момента условия $1 < p < \infty$ и $0 < \mu < \nu$ предполагаются выполненными.

Рассмотрим гладкие не меняющие ориентации параметризации класса $\underline{C}^{1,\nu}$ ее составных компонент в разложении (2.3), которые определены на полуоси для дуг и единичной окружности $\mathbb{T}$ для простых контуров:

$$\delta_i : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \Gamma_i, & 1 \le j \le m, \\ \mathbb{T} \to \Gamma_i, & m+1 \le j \le \overline{m}, \end{cases} \in \underline{C}^{1,\nu},$$

где окружность ориентирована против часовой стрелки. С помощью этих параметризаций введем сингулярный оператор S, действующий вдоль составных компонент по формуле

$$(S\varphi) \circ \delta_j = \begin{cases} R(s)(\varphi \circ \delta_j), & 1 \le j \le m, \\ \mathbb{K}(\varphi \circ \delta_j), & m+1 \le j \le \overline{m}, \end{cases} \tag{6.5}$$

где $\mathbb{K}$ означает сингулярный оператор Коши K на единичной окружности $\mathbb{T}$.

Аналогично лемме 6.2 для этого оператора нетрудно получить следующий важный результат.

Теорема 6.1. *Оператор S принадлежит каждой из алгебр $\mathscr{B}(L^p_\lambda)$, $\mathscr{B}(C^\mu_\lambda)$ для любого весового порядка λ, и его концевой символ представляет собой диагональную матрицу с элементами*

$$\widehat{S}_{\tau,k} = \varepsilon_{\tau,k} Ms, \quad 1 \le k \le n_\tau, \tag{6.6}$$

вдоль диагонали, где $\varepsilon_{\tau,k}$ — сигнатура ориентации кривой, введенная в (2.6).

При этом имеют место соотношения

$$S^2 - 1 \in \mathscr{B}^0, \quad aS \sim Sa \tag{6.7}$$

где $a \in \mathscr{C}(\Gamma, F)$ и эквивалентность понимается по модулю $\mathscr{T}(L^p_\lambda)$ и $\mathscr{T}(C^\mu_\lambda)$.

Из определения п. 3 весовых пространств видно, что оператор умножения на весовую функцию ρ_δ обратим $L^p_{\lambda-\delta} \to L^p_\lambda$ и $C^\mu_{\lambda-\delta} \to C^\mu_\lambda$. Соответственно преобразование $N \to \rho_\delta^{-1} N \rho_\delta$ осуществляет изоморфизм банаховых алгебр $\mathscr{L}(L^p_{\lambda-\delta}) \to \mathscr{L}(L^p_\lambda)$ и $\mathscr{L}(C^\mu_{\lambda-\delta}) \to \mathscr{L}(C^\mu_\lambda)$. Следующая лемма показывает, что это справедливо и по отношению к $\mathscr{B}^0$ и $\mathscr{B}$.

Лемма 6.3. *Преобразование $N \to \rho_\delta^{-1} N \rho_\delta$ осуществляет изоморфизм алгебр $\mathscr{B}(L^p_{\lambda-\delta}) \to \mathscr{B}(L^p_\lambda)$ и $\mathscr{B}(C^\mu_{\lambda-\delta}) \to \mathscr{B}(C^\mu_\lambda)$, а также соответствующих подалгебр $\mathscr{B}^0$. При этом $\rho_\delta^{-1} S \rho_\delta - S \in \mathscr{B}^0$ и концевые символы операторов N и $\rho_\delta^{-1} N \rho_\delta$ связаны соотношением*

$$(\rho_\delta^{-1} N \rho_\delta)^\wedge_\tau(\zeta - \delta_\tau) = \widehat{N}_\tau(\zeta), \quad \operatorname{Re} \zeta = \lambda_\tau.$$

Рассмотрим сингулярный оператор Коши (1.1). В принятом предположении $(\Gamma, F) \in \underline{C}^{1,\nu}$ ограниченность этого оператора в пространствах $C^{\mu}_{\lambda}(\Gamma, F)$ и $L^{p}_{\lambda}(\Gamma, F)$ при $-1 < \lambda < 0$ на конечной кусочно ляпуновской кривой хорошо известна. Она установлена Р. Дудучава [20] в C^{μ}-случае и Б. В. Хведелидзе [3] в L^{p}-случае. Аналогичный результат для бесконечной кусочно ляпуновской кривой установлен в [16]. Напомним, что узлы $\tau \in F$ кривой не являются точками возврата, если векторы (3.6) попарно различны.

Теорема 6.2. *Пусть кривая Γ не имеет точек возврата. Тогда сингулярный оператор Коши K принадлежит каждой из алгебр $\mathscr{B}(L^{p}_{\lambda})$, $\mathscr{B}(C^{\mu}_{\lambda})$, $-1 < \lambda < 0$, и его концевой символ определяется равенством*

$$\widehat{K}_{\tau,kr}(\zeta) = \begin{cases} i\varepsilon_{\tau,k} \operatorname{ctg} \pi\zeta, & k = r, \\ i\varepsilon_{\tau,r}(-q_{\tau,k}q^{-1}_{\tau,r})^{\zeta}(\sin \pi\zeta)^{-1}, & k \neq r, \end{cases} \quad 1 \leq k, r \leq n_{\tau}. \tag{6.8}$$

При этом $K - S \in \mathscr{B}^{0}$.

Эта теорема устанавливается с помощью лемм 6.1 и 4.2. Что касается последнего утверждения теоремы, то оно доказывается с использованием леммы 5.1 применительно к $K-S$. Отметим попутно, что при этом не используется теорема перестановки сингулярных интегралов, участвующая в доказательстве леммы 6.2(b).

Напомним, что интегральные операторы действуют в пространстве l-вектор-функций. Рассмотрим другое, более существенное обобщение интегралов (1.1). С этой целью введем $l \times l$-матрицу-функцию $J(t) \in C^{\nu}(\Gamma)$, собственные значения которой не лежат на вещественной прямой $\mathbb{R}$.

С каждым ненулевым комплексным числом $z = x + iy$ удобно связать матрицу

$$z_{J(t)} = x + yJ(t),$$

которая обратима с обратной матрицей $z^{-1}_{J(t)}$. Как обычно, здесь скаляр x отождествляется со скалярной матрицей $x1$, где 1 означает единичную матрицу соответствующего порядка. Аналогичный смысл имеет и матричный дифференциал $dt_{J}(t)$. По отношению к элементу $d_1 t$ длины дуги и касательного вектора e в (3.5) можем написать

$$dt = e(t)d_1 t, \quad dt_{J(t)} = [e(t)]_{J(t)}\, d_1 t. \tag{6.9}$$

В этих обозначениях аналогом (6.1) служат обобщенный сингулярный оператор Коши

$$(K_{(J)}\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\Gamma} (t - t_0)^{-1}_{J(t)} dt_{J(t)} \varphi(t), \quad t_0 \in \Gamma, \tag{6.10}$$

В подынтегральном выражении матричный дифференциал $dt_{J(t)}$ поставлен впереди φ, чтобы подчеркнуть, что все матричное выражение $(t - t_0)^{-1}_{J(t)} dt_{J(t)}$ действует на вектор φ по обычному правилу. Конечно, при $J(t) \equiv i$ интеграл (6.10) переходит в (6.1). Он является частным случаем рассмотренных в [16] более общих интегралов с разностными ядрами, однородными степени -1. В этой работе показано, в частности, что оператор $K_{(J)}$ также ограничен в пространствах L^p_λ, C^μ_λ, $-1 < \lambda < 0$. Интеграл (6.10) играет важную роль в теории эллиптических систем на плоскости [21], поскольку при фиксированном t матрица- функция $X(z) = z^{-1}_{J(t)}$ по переменной $z = x + iy$ служит фундаментальной матрицей [22] для эллиптической системы первого порядка

$$\frac{\partial U}{\partial y} - J(t)\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad z \in D.$$

В дальнейшем широко будет использоваться понятие функции от матриц [23]. Именно, если функция $f(w)$ аналитична в области D, ограниченной кусочно гладким контуром и содержащей спектр $\sigma(A)$ некоторой матрицы $A \in \mathbb{C}^{l\times l}$, то значение $f(A) \in \mathbb{C}^{l\times l}$ определяется интегралом

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} f(w)(w - A)^{-1}\,dw, \tag{6.11}$$

где контур ∂G ориентирован положительно по отношению к D (т. е. оставляет эту область слева). Нетрудно видеть, что верно равенство $\overline{f(A)} = \overline{f}(\overline{A})$ получаемое путем комплексного сопряжения равенства (6.11) и последующей замены переменной $t = \overline{w}$ под интегралом. Под $\overline{f}$ здесь понимается функция $\overline{f}(w) = \overline{f(\overline{w})}$ с комплексным сопряжением в правой части, которая аналитична в окрестности спектра матрицы $\overline{A}$.

В конкретных ситуациях обычно матрицу A приводят к блочно-диагональному виду, диагональные блоки которого имеют единственное собственное значение. В этом случае матрица $f(A)$ вычисляется явно:

$$T^{-1}AT = \operatorname{diag}(\widetilde{A}_1, \dots, \widetilde{A}_n), \quad \widetilde{A}_j = \alpha_j(1 + \Delta_j), \quad \sigma(\Delta_j) = \{0\},$$

$$f(A) = \operatorname{diag}[f(\widetilde{A}_1), \dots, f(\widetilde{A}_n)], \quad f(\widetilde{A}_j) = \sum_{0\le k\le l-1} \frac{f^{(k)}(\nu_j)}{k!}\Delta_j^k.$$

Доказательство осуществляется подстановкой разложения $f(w)$ в ряд Тейлора по степеням $w - \nu_j$ под знаком интеграла (6.11) для $A = \widetilde{A}_j$. Здесь учтено, что матрица Δ_j нильпотентна, т. е. $\Delta_j^l = 0$, и поэтому ряд обрывается на $k = l - 1$.

Наиболее часто ниже будут встречаться степенные функции от обратимой матрицы A с комплексным показателем: $A^\zeta = e^{\zeta \ln A}$, где ветвь $\ln w$ выбирается с разрезом вдоль луча, не проходящим через собственные значения матрицы. В этом случае предыдущее выражение принимает вид

$$\widetilde{A}_j^\zeta = \alpha_j^\zeta(1 + \Delta_j)^\zeta, \quad (1 + \Delta_j)^\zeta = \sum_{k=1}^{l-1} \frac{\zeta(\zeta - 1)\cdots(\zeta - k + 1)}{k!}\Delta_j^k.$$

Заметим, что матрица $(1 + \Delta_j)^\zeta - 1$ нильпотентна, так что определитель матричного многочлена $(1 + \Delta_j)^\zeta$ тождественно равен 1.

В случае, когда узел τ кривой Γ не является точкой возврата, векторы $q_{\tau,k}$, попарно различны, так что при $k \neq r$ единичный вектор $w = -q_{\tau,k}q_{\tau,r}^{-1}$ не лежит на мнимой оси. Рассмотрим матрицы

$$Q_{\tau,k} = (q_{\tau,k})_{J(\tau)}, \quad 1 \leq k \leq n_\tau.$$

Важно заметить, что для $k \neq j$ собственные значения матрицы $-Q_{\tau,k}Q_{\tau,j}^{-1}$ не лежат на отрицательной полуоси.

Теорема 6.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 6.2 *и задана матрица-функция* $J \in \underline{C}^\nu(\Gamma)$, *причем в каждой точке* $t \in \Gamma$ *собственные значения* $J(t)$ *не лежат на вещественной прямой.*

Тогда теорема 6.2 *сохраняет свою силу и для оператора* $K_{(J)}$ *с той разницей, что в формуле* (6.8) *для концевого символа нужно вектор* $q_{\tau,k}$ *заменить матрицей* $Q_{\tau,k}$.

7. Фредгольмовость и индекс. Напомним основные понятия, связанные с фредгольмовостью операторов. Подпространство Y_1 банахова пространства Y назовем *коконечномерным*, если оно замкнуто и фактор-пространство Y/Y_1 конечномерно. Последнее равносильно тому, что Y раскладывается в прямую сумму $Y_0 \oplus Y_1$ с некоторым конечномерным подпространством Y_0. При этом $\dim Y_0 = \dim(Y/Y_1)$, эта общая размерность называется *коразмерностью* подпространства Y_1 и обозначается через $\operatorname{codim} Y_1$.

По определению ограниченный оператор $N \in \mathscr{L}(X,Y)$, действующий в банаховых пространствах $X \to Y$, фредгольмов, если его ядро $\ker N$ конечномерно, а образ $\operatorname{im} N \subseteq Y$ коконечномерен, в этом случае разность $\operatorname{ind} N = \dim(\ker N) - \operatorname{codim}(\operatorname{im} N)$ называется *индексом оператора* N. Заметим, что класс всех ограниченных линейных функционалов $y^* \in Y^*$, обращающихся в нуль на образе $(\operatorname{im} N)$ оператора N, составляет ядро сопряженного оператора N^*, при этом его размерность совпадает с коразмерностью $(\operatorname{im} N)$.

Основные свойства фредгольмовых операторов хорошо известны и изложены во многих источниках (см., например, [16, 24, 25]. Поэтому для удобства приведем их без доказательства в отдельной теореме. Как обычно, ниже 1 означает единичный оператор в соответствующих пространствах и отношение эквивалентности $N_1 \sim N_2$ указывает на компактность оператора $N_1 - N_2$.

Теорема 7.1. (a) *Множество фредгольмовых операторов открыто в банаховом пространстве* $\mathscr{L}(X,Y)$ *и их индекс как целочисленная функция постоянен на связных компонентах этого множества.*

(b) *Если операторы* $N_1 \in \mathscr{L}(X,Y)$ *и* $N_2 \in \mathscr{L}(Y,Z)$ *фредгольмовы, то их произведение* $N_2N_1 \in \mathscr{L}(X,Z)$ *есть также фредгольмовый оператор и его индекс* $\operatorname{ind}(N_2N_1) = \operatorname{ind} N_1 + \operatorname{ind} N_2$.

(c) *Если оператор* $N \in \mathscr{L}(X,Y)$ *фредгольмов, то для любого компактного оператора* $N_0 \in \mathscr{T}(X,Y)$ *сумма* $N + N_0$ *является фредгольмовым оператором того же индекса.*

(d) *Оператор* $N \in \mathscr{L}(X,Y)$ *фредгольмов тогда и только тогда, когда существуют такие операторы* $R_1, R_2 \in \mathscr{L}(Y,X)$, *что* $R_1 N \sim 1$ *и* $NR_2 \sim 1$. *При этом разность* $R_1 - R_2$ *является компактным оператором.*

(e) *Оператор* $N \in \mathscr{L}(X,Y)$ *и сопряженный к нему оператор* $N^* \in \mathscr{L}(Y^*, X^*)$ *свойством фредгольмовости обладают одновременно и их индексы противоположны, причем* $\dim N^* = \mathrm{codim}(\mathrm{im}\, N)$.

В литературе иногда фредгольмовы операторы называются нетеровыми, сохраняя термин фредгольмовости для нетеровых операторов индекса нуль. Из теоремы 7.1(c), в частности следует, что оператор $N = 1+N_0$, $N_0 \in \mathscr{T}(X)$, фредгольмов индекса нуль. Этот факт известен как теорема Рисса — Шаудера [27]. Операторы R_1 и R_2 называются соответственно *левым* и *правым регуляризаторами* N, которые согласно (d) отличается друг от друга компактным слагаемым, так что можно говорить просто о регуляризаторе $R = N^{(-1)}$.

Особо остановимся на случае $X = Y$, когда $\mathscr{L}(X)$ является банаховой алгеброй, а класс $\mathscr{T}(X)$ компактных операторов является ее замкнутым двусторонним идеалом. В частности, фактор-пространство $\widetilde{\mathscr{L}}(X) = \mathscr{L}(X)/\mathscr{T}(X)$ также является банаховой алгеброй, которая носит название *алгебры Калкина.* Из теоремы 7.1 непосредственно следует, что оператор $N \in \mathscr{L}(X)$ фредгольмов тогда и только тогда, когда его класс смежности $[N] = N + \mathscr{T}(X)$ обратим в алгебре $\widetilde{\mathscr{L}}(X)$, при этом индекс индуцирует гомоморфизм $\widetilde{\mathrm{Ind}}$ из группы обратимых элементов этой алгебры в аддитивную группу целых чисел.

Проиллюстрируем теорему на операторах, действующих в паре банаховых пространств X_1, X_2. Предполагается, что они содержатся в некотором векторном пространстве, так что определены сумма $X_1 + X_2$ и пересечение $X_0 = X_1 \cap X_2$ этих пространств. Последнее банахово относительно нормы $|x| = |x|_{X_1} + |x|_{X_2}$. Можно ввести норму и в пространстве $X_1 + X_2$, но на этом не останавливаемся. Обозначим через $\mathscr{L}(X_i, i = 1,2)$ банахову алгебру операторов, действующих в $X_1 + X_2$ и ограниченных в каждом из пространств X_1, X_2. Аналогичный смысл имеет двусторонний замкнутый идеал $\mathscr{T}(X_i,\, i = 1,2)$ этой алгебры компактных операторов. Сужение N на X_i, рассматриваемое как элемент $\mathscr{L}(X_i)$, обозначим через $N|X_i$.

Лемма 7.1. *Пусть операторы* $N, N^{(-1)}$ *принадлежат* $\mathscr{L}(X_i,\, i = 1,2)$, *причем* $NN^{(-1)} \sim N^{(-1)}N \sim 1$, *где эквивалентность понимается по модулю идеала* $\mathscr{T}(X_i,\, i = 1,2)$. *Предположим, что для любых линейного функционала* $f \in \ker(N|X_i)^*$ *и* $i = 1,2$ *условие* $f|(X_1 \cap X_2) = 0$ *равносильно* $f = 0$.

Тогда

$$\mathrm{ind}(N|X_1) = \mathrm{ind}(N|X_2), \quad \ker(N|X_1) = \ker(N|X_2) \subseteq X_1 \cap X_2.$$

Доказательство. Рассмотрим в банаховом пространстве $X_0 = X_1 \cap X_2$ оператор $N|X_0$, который, очевидно, ограничен. Если N принадлежит $\mathscr{T}(X_i,\, i = 1,2)$, то и оператор $N|X_0$ компактен, т. е. принадлежит $\mathscr{T}(X_0)$. Другими словами, алгебра $\mathscr{L}(X_i,\, i = 1,2)$ совпадает с $\mathscr{L}(X_i, i = 0,1,2)$ и аналогично для соответствующей алгебры компактных операторов. В частности, $N^{(-1)}$ является регуляризатором N и по отношению к алгебре $\mathscr{L}(X_i, i = 0,1,2)$.

Очевидно, $\dim[\ker(N|X_0)] \leq \dim[\ker(N|X_i)]$, $i = 1,2$, так что в силу теоремы 7.1(e) и второго условия леммы имеем также неравенство

$$\operatorname{codim}[\operatorname{im}(N|X_0)] \geq \operatorname{codim}[\operatorname{im}(N|X_i)].$$

Поскольку эти соотношения справедливы и по отношению к $N^{(-1)}$, приходим к заключению, что эти неравенства в действительности являются точными равенствами, что и приводит к справедливости леммы.

Из теоремы 6.1 следует, что операторы вида

$$2N = a(1+S) + b(1-S) + 2N^0, \tag{7.1}$$

где $a, b \in \mathscr{C}(\Gamma, F)$ и $N^0 \in \mathscr{B}^0$, образуют подалгебру в $\mathscr{B}$. При этом если N_j, $j = 1,2$, определяются аналогичным образом по a_j, b_j и N_j^0, то $N = N_1 N_2$ определяется (7.1) по $a = a_1 a_2$, $b = b_1 b_2$ с некоторым $N^0 \in \mathscr{B}^0$. Отметим также, что концевой символ $\widehat{N}_\tau \in C(\lambda_\tau)$ имеет пределы при $\operatorname{Im}\zeta \to \pm\infty$.

Следующая центральная теорема доставляет критерий фредгольмовости этих операторов и формулу ее индекса. Предварительно введем понятие индекса Коши для обратимых в $C(\Gamma, F)$ кусочно непрерывных матриц-функций c и для операторов (7.1) с обратимыми в $C(\lambda_\tau)$ концевыми символами $\widehat{N}_\tau$, $\tau \in F$. Они представляют собой комплексные числа, определяемые равенствами

$$\operatorname{Ind}_{\Gamma,F} c = \sum_{j=1}^{\overline{m}} \frac{1}{2\pi i}[\ln\det c]\Big|_{\Gamma_j}, \quad \operatorname{Ind}_{\lambda,F} \widehat{N} = \sum_{\tau\neq\infty} \operatorname{Ind}_{\lambda_\tau} \widehat{N}_\tau + \operatorname{Ind}_{\lambda_\infty} \widehat{N}_\infty,$$

где квадратные скобки указывают на приращения непрерывной ветви логарифма, которые берутся по составным компонентам в разложении (2.3) кривой и на бесконечной прямой $\operatorname{Re}\zeta = \lambda$. Конечно, последнее слагаемое в правой части второго равенства возникает только в случае бесконечной кривой.

Теорема 7.2. *Оператор N в (7.1) фредгольмов в каждом из пространств L^p_λ и C^μ_λ тогда и только тогда, когда коэффициенты a, b обратимы в $\mathscr{C}(\Gamma, F)$ и*

$$\det\widehat{N}_\tau(\zeta) \neq 0, \quad \operatorname{Re}\zeta = \lambda_\tau, \quad \tau \in F. \tag{7.2}$$

При выполнении этих условий концевой символ $\widehat{N}_\tau$ обратим в $M(\lambda_\tau)$ для всех τ и существует оператор вида

$$2N^{(-1)} = a^{-1}(1+S) + b^{-1}(1-S) + 2N^0_*, \quad N^0_* \in \mathscr{B}^0. \tag{7.3}$$

концевой символ которого совпадает с $\widehat{N}^{-1}$ и который служит регуляризатором N. При этом индекс оператора N дается формулой

$$\operatorname{ind} N = \operatorname{Ind}_{\Gamma,F}(a^{-1}b) - \operatorname{Ind}_{\lambda,F}\widehat{N}. \tag{7.4}$$

Заметим, что в силу обратимости коэффициентов a, b концевой символ оператора $a(1+S) + b(1-S)$ также обратим. Поэтому с учетом (7.2) матрица-функция $\widehat{N}_\tau$ обратима в алгебре $C(\lambda_\tau)$, так что правая часть формулы индекса имеет смысл. То, что разность двух комплексных чисел в правой части этой формулы, представляющих соответствующие индексы Коши, является целым числом, проверяется непосредственно.

Доказательство. В случае $a = b = 1$ оператор $N = 1 + N^0$, $N^0 \in \mathscr{B}^0$, сводится к операторам Винера — Хопфа с разностным ядром и утверждение теоремы является следствием хорошо известных результатов [26, 27] для этих операторов.

В общем случае можно показать, что для заданных обратимых в $\mathscr{C}$ коэффициентов a, b всегда найдется такой $\widetilde{N}^0 \in \mathscr{B}^0$, что концевой символ оператора

$$2\widetilde{N} = a^{-1}(1 + S) + b^{-1}(1 - S) + 2\widetilde{N}^0$$

обратим. Поэтому

$$N\widetilde{N} \sim 1 + N_1^0, \quad \widetilde{N}N \sim 1 + N_2^0, \tag{7.5}$$

с некоторыми $N_j^0 \in \mathscr{B}^0$. Очевидно, концевые символы $(1 + N_j^0)^\wedge_\tau$ удовлетворяют условию (7.2). Поэтому на основании (7.5) и теоремы 7.1 заключаем, что операторы N и $\widetilde{N}$ также фредгольмовы. Из этих же соображений утверждение о регуляризаторе достаточно установить для оператора $N = 1 + N^0$, $N^0 \in \mathscr{B}^0$. Дело сводится к доказательству того, что если на прямой $\operatorname{Re}\zeta = \lambda$ задана матрица-функция $x \in M^0(\lambda)$ и $1 + x$ обратима в $C(\lambda)$ или, что равносильно, удовлетворяет аналогичному (7.2) условию, то $x_0 = (1 + x)^{-1} - 1 \in M^0(\lambda)$. Для $ML^1\{\lambda\}$ этот факт вытекает из известной теоремы Винера [28]. Но эта теорема справедлива и для алгебры $ML^{1,q}\{\lambda\}$, поскольку она является двусторонним идеалом $ML^1\{\lambda\}$. В свою очередь, последнее свойство является следствием первой из оценок (4.8).

Обратимся к доказательству формулы индекса (7.4). С учетом леммы 6.3 ее достаточно установить хотя бы для одного весового порядка λ, поэтому можно предполагать $-1 < \lambda < 0$. Без ограничения общности можно также считать, что $a = 1$, т. е. в этом случае формула индекса принимает вид

$$\operatorname{ind} N = \operatorname{Ind}_{\Gamma,F} b - \operatorname{Ind}_{\lambda,F} \widehat{N}, \quad 2N = 1 + S + b(1 - S) + 2N^0, \tag{7.6}$$

Напомним, что в разложении (2.3) компоненты Γ_j являются при $j \le m$ дугами, а при $j > m$ — контурами. Объединение этих компонент по указанным j обозначим соответственно через Γ_{arc} и Γ_{cont}. Таким образом,

$$\Gamma = \Gamma_{arc} \cup \Gamma_{cont}, \quad \Gamma_{arc} \cap \Gamma_{cont} = \varnothing. \tag{7.7}$$

Очевидно, $L^p_\lambda(\Gamma, F) = L^p_\lambda(\Gamma_{arc}, F) \times L^p(\Gamma_{cont})$ и аналогично раскладывается пространство $C^\nu_\lambda(\Gamma, F)$. С учетом (7.7) относительно этих разложений фигурирующие в (7.6) операторы, где, напомним, роль S играет оператор Коши K), представляются 2×2-матрицами

$$b = \begin{pmatrix} b_{arc} & 0 \\ 0 & b_{cont} \end{pmatrix}, \quad K \sim \begin{pmatrix} K_{arc} & 0 \\ 0 & b_{cont} \end{pmatrix}, \quad W(f) = \begin{pmatrix} W_{arc}(f) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, в соответствии с теоремой 7.1 формулу (7.6) достаточно установить для случаев $\Gamma = \Gamma_{cont}$ и $\Gamma = \Gamma_{arc}$ отдельно. В первом случае $2N = 1 - K + b(1+K)$ и формула индекса хорошо известна [2].

Обратимся к случаю $\Gamma = \Gamma_{arc}$ и обозначим через $\widetilde{\mathrm{Ind}}N$ разность между левой и правой частями формулы (7.6). Непосредственно проверяется, что данная разность непрерывно зависит от b и в действительности является целым числом. Убедимся, что эта величина не зависит от выбора оператора $N^0 \in \mathscr{B}^0$, подчиненного условию обратимости концевого символа $\widehat{N}$. В самом деле, в случае $b = 1$, как было отмечено выше, эта величина равна нулю. В общем случае пусть N_1 обладает тем же свойством, что и N, и $\widetilde{N}$ определяется аналогично по отношению к b^{-1}. Тогда $0 = \widetilde{\mathrm{Ind}}(\widetilde{N}N) = \widetilde{\mathrm{Ind}}\widetilde{N} + \widetilde{\mathrm{Ind}}N$ и аналогичное равенство можно выписать применительно к $\widetilde{N}$ и N_1. Поэтому $\widetilde{\mathrm{Ind}}N = \widetilde{\mathrm{Ind}}N_1$.

Тем самым величина $\widetilde{\mathrm{Ind}}N$ зависит только от b и ее можно обозначить через $\widetilde{\mathrm{Ind}}b$, причем как функция от b она непрерывна. Поскольку она принимает целочисленные значения, на каждой связной компоненте группы обратимых элементов банаховых алгебр $C(\Gamma, F)$ и $C^\nu(\Gamma, F)$ эта функция постоянна. Но в рассматриваемом случае $\Gamma = \Gamma_{arc}$ эти группы связны и, следовательно, $\widetilde{\mathrm{Ind}}b = 0$.

Итак, в предположении обратимости коэффициентов a, b все утверждения теоремы установлены. Остается убедиться, что при нарушении этого требования оператор N не может быть фредгольмовым. Предположим противное: оператор N фредгольмов, но один из коэффициентов, скажем a, не является обратимым. Для определенности ограничимся L^p-случаем, второй C^μ-случай рассматривается аналогично. Малые изменения коэффициентов по норме банаховой алгебры $C(\Gamma, F)$ приводят к малым изменениям N по операторной норме, так что согласно теореме 7.1 они сохраняют фредгольмовость оператора. Заметим далее, что множество обратимых элементов плотно в алгебре $C(\Gamma, F)$. Поэтому не ограничивая общности можно считать, что

$$2N = a(1 + S) + b(1 - S) + 2W(f), \tag{7.8}$$

где коэффициент a обратим, коэффициент b необратим, но обратима матрица $\widehat{b}$ его концевого символа (т. е. обратимы предельные значения $\widehat{b}_{\tau,j}$ в концевых точках кривой). Выберем фредгольмовый оператор N_1 вида (7.7) с коэффициентами a_1 и b_1, для которых $a_1 = a^{-1}$ и $\widehat{b}_1 = (\widehat{b})^{-1}$. Заменяя N на NN_1, можем без ограничения общности считать, что $a = 1$ и $\widehat{b} = 1$, в частности, тогда

$$2\widehat{N}_\tau = (1 + \widehat{S}_\tau) + (1 - \widehat{S}_\tau) + 2Mf_\tau,$$

т. е. $\widehat{N}_\tau = 1 + Mf_\tau$. По условию матрица-функция f_τ принадлежит пересечению банаховых пространств $X^\pm = L^q(\lambda_\tau \pm \varepsilon)$ с некоторыми $q > 1$ и $\varepsilon > 0$, которое банахово относительно нормы

$$|f| = |f|_{X^+} + |f|_{X^-}.$$

Для каждого $\tau \in F$ существует последовательность функций $f_{n,\tau}$, сходящаяся к f_τ по этой норме, для которых матрицы-функции $1 + Mf_{n,\tau}$ обратимы. Заменяя в (7.8) семейство $f = (f_\tau, \tau \in F)$ на $f_n = (f_{n,\tau}, \tau \in F)$ с достаточно большим номером n, без ограничения общности можно также считать, что концевой символ $\widehat{N}$ оператора N также обратим. Выберем теперь последовательности $b_n^\pm$ обратимых элементов $C(\Gamma, F)$, сходящиеся к b, так, чтобы их концевые символы были равны $\widehat{b} = 1$, но

$$\mathrm{Ind}_{\Gamma,F}\, b_n^+ \neq \mathrm{Ind}_{\Gamma,F}\, b_n^- \tag{7.9}$$

при каждом n. Заметим, что поскольку концевые символы $b_n^\pm$ равны 1, индексы Коши в этом условии являются целыми числами. Пусть операторы $N_n^\pm$ получаются в (7.8) заменой b а $b_n^\pm$. Тогда к этим операторам можно применить доказанную часть теоремы, согласно которой они фредгольмовы и их индекс дается формулой

$$\mathrm{ind}\, N_n^\pm = \mathrm{Ind}_{\Gamma,F}\, b_n^\pm - \mathrm{Ind}_{(\lambda,F)}\, \widehat{N}.$$

С другой стороны, операторы $N_n^\pm$ сходятся к N по операторной норме и, следовательно, $\mathrm{ind}\, N_n^\pm = \mathrm{ind}\, N$ при достаточно больших n. Но этот факт противоречит (7.9) и последнему равенству, что завершает доказательство теоремы.

Согласно теореме 6.2 к типу (7.1) относятся классический оператор $a(1 + K) + b(1 - K)$, а также $\mathbb{C}$-линейный оператор $a(1 + K) + \overline{a}(1 - \overline{K})$, где черта означает операторную инволюцию комплексного сопряжения. Последний оператор играет важную роль в теории краевых задач для аналитических функций. В силу теоремы 6.3 это же верно и по отношению к аналогичным операторам, отвечающим K_J. Концевой символ всех этих операторов допускает явные выражения, что позволяет критерий фредгольмовости (7.2) и формулу индекса (7.3) описать непосредственно в терминах коэффициентов. Эти результаты приведены в работах [29, 30].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977.

2. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.

3. *Хведелидзе Б. В.* Линейные разрывные задачи теории функций, сингулярные интегральные уравнения и некоторые их приложения // Тр. Тбил. Мат. Ин-та АН Груз. ССР. 1956. Т. 23. С. 3–158.

4. *Векуа И. Н.* Системы сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука, 1970.

5. *Симоненко И. Б.* Новый общий метод исследования линейных операторных уравнений типа сингулярных интегральных уравнений. I // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1965. Т. 29, вып. 3. С. 567–586.

6. *Симоненко И. Б.* Новый общий метод исследования линейных операторных уравнений типа сингулярных интегральных уравнений. II // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1965. Т. 29, вып. 4. С. 757–782.

7. *Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я.* Введение в теорию одномерных сингулярных операторов. Кишинев: Штиинца, 1973.

8. *Солдатов А. П.* Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций. М.: Высшая школа, 1991.

9. *Солдатов А. П.* Метод теории функций в эллиптических краевых задачах на плоскости. II. Кусочно-гладкий случай // Изв. РАН. Сер. мат. 1992. Т. 56, вып. 3. С. 566–604.

10. *Bierman G. J.* A particular class of singular integral equation // SIAM J. Appl. Math. 1971. V. 20, N 1. P. 99–109.

11. *Bueckner H. F.* On a class of singular integral equations // J. Math. Anal. Appl. 1966. V. 14, N 3. P. 392–426.

12. *Попов С. В.* Краевая задача Жевре для уравнения третьего порядка // Мат. заметки СВФУ. 2017. Т. 24, № 1. С. 43–56.

13. *Попов С. В.* Параболические уравнения с меняющимся направлением эволюции // Мат. заметки ЯГУ. 2000. Т. 7, № 2. С. 93–112.

14. *Дудучава Р. В.* Интегральные уравнения свертки с разрывными предсимволами, сингулярные интегральные уравнения с неподвижными особенностями и их приложения к задачам механики. Тбилиси: Мецниереба, 1979. (Сер.: Тр. Тбил. мат. ин-та им. А. М. Размадзе / АН Груз. ССР, Т. 60).

15. *Дудучава Р. В.* Общие сингулярные интегральные уравнения и основные задачи плоской теории упругости // Тр. Тбил. мат. ин-та им. А. М. Размадзе. 1986. Т. 82. С. 45–89.

16. *Солдатов А. П.* Сингулярные интегральные операторы и эллиптические краевые задачи // Современная математика. Фундаментальные направления. 2017. Т. 63, № 1. С. 1–189

17. *Стейн И. М.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1972.

18. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. М.: Наука, 1969.

19. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981.

20. *Дудучава Р. В.* Об ограниченности оператора сингулярного интегрирования в гёльдеровых пространствах с весом // Мат. исследования. Кишинев: Штиинца, 1970. Т. 5, вып. 1. С. 56–76.

21. *Отелбаев М., Солдатов А. П.* Интегральные представления вектор-функций, основанные на параметриксе эллиптических систем первого порядка // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2021. Т. 61, № 1. С. 967–976.

22. *Бицадзе А. В.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: Наука, 1966.

23. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. Изд. 4-е. М.: Наука, 1988.

24. *Крейн М. Г.* Интегральные уравнения Винера — Хопфа на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов // Успехи мат. наук. 1958. Т. 13, вып. 5. С. 3–120.

25. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов // Успехи мат. наук. 1958. Т. 13, вып. 2. С. 3–72.

26. *Рудин У.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1991.

27. *Пале Р.* Семинар по теореме Атии — Зингера об индексе. М.: Мир, 1970.

28. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1971.

29. *Солдатов А. П.* Сингулярные интегральные операторы с обобщенным ядром Коши на кусочно гладком контуре // Мат. заметки СВФУ. 2021. Т. 28, № 3. С. 70–82.

30. *Солдатов А. П.* Обобщенный сингулярный оператор Коши на кусочно гладкой кривой // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2022. Т. 503. С. 76–82.

Поступила в редакцию 4 ноября 2022 г.
После доработки 6 ноября 2022 г.
Принята к публикации 29 ноября 2022 г.

Солдатов Александр Павлович
Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН,
ул. Вавилова, 40, Москва 119333;
Московский центр фундаментальной и прикладной математики МГУ;
Национальный исследовательский университет «МЭИ»;
ГБУ «Академия наук Республики Саха (Якутия)»
soldatov48@gmail.com

Математические заметки СВФУ
Октябрь—декабрь, 2022. Том 29, № 4

UDC 517.9

SINGULAR INTEGRAL EQUATIONS OF NONCLASSICAL TYPE ON A PIECEWISE SMOOTH CURVE

A. P. Soldatov

Abstract: We consider singular integral operators on a piecewise smooth curve in weighted Lebesgue and Hölder spaces with piecewise continuous matrix coefficients. In contrast to the classical case, these operators, in addition to the singular Cauchy operator, also contain non-compact integral operators of a special form which are defined by the kernel that is approximately homogeneous of degree -1 with respect to distances to the nodes of the curve. Similar operators arise in many applications. A criterion for the Fredholm property of these operators is obtained and a formula for their index is given.

DOI: 10.25587/SVFU.2023.51.83.004

Keywords: singular integral operator, piecewise smooth contour, weighted Lebesgue and Hölder spaces, singular Cauchy operator, integral operator with kernel homogeneous of degree -1, Fredholm criterion, index formula.

REFERENCES

1. *Gakhov F. D.*, Boundary Value Problems [in Russian], Nauka, Moscow (1977).
2. *Muskhelishvili N. I.*, Singular Integral Equations [in Russian], Nauka, Moscow (1968).
3. *Khvedelidze B. V.*, "Linear discontinuous problems of function theory, singular integral equations and some of their applications [in Russian]," Tr. Tbil. Mat. Inst. Akad. Nauk Gruzin. SSR. **23**, 3–158 (1956).
4. *Vekua I. N.*, Systems of Singular Integral Equations [in Russian], Nauka, Moscow (1970).
5. *Simonenko I. B.*, "A new general method for studying linear operator equations of the type of singular integral equations. I [in Russian]," Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., **29**, No. 3, 567–586 (1965).
6. *Simonenko I. B.*, "A new general method for studying linear operator equations of the type of singular integral equations. II [in Russian]," Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., **29**, No. 4, 757–782 (1965).
7. *Gokhberg I. Ts. and Krupnik N. Ya.*, Introduction to the Theory of One-Dimensional Singular Operators, Shtiintsa, Kishinev (1973).
8. *Soldatov A. P.*, One-dimensional Singular Operators and Boundary Value Problems of Function Theory [in Russian], Vysshaya Shkola, Moscow (1991).
9. *Soldatov A. P.*, "A function theory method in elliptic problems in the plane. II: The piecewise smooth case [in Russian]," Russ. Acad. Sci., Izv., Math., **40**, No. 3, 529–563 (1993).
10. *Bierman G. J.*, "A particular class of singular integral equation," SIAM J. Appl. Math., **20**, No. 1, 99–109 (1971).
11. *Bueckner H. F.*, "On a class of singular integral equations," J. Math. Anal. Appl., **14**, No. 3, 392–426 (1966).
12. *Popov S. V.*, "Gevrey's boundary value problem for a third-order equation [in Russian]," Mat. Zamet. SVFU, **24**, No. 1, 43–56 (2017).

13. *Popov S. V.*, “Parabolic equations with changing direction of evolution [in Russian],” Mat. Zamet. YAGU, **7**, No. 2, 93–112 (2000).
14. *Duduchava R. V.*, Convolution Integral Equations with Discontinuous Presymbols, Singular Integral Equations with Fixed Singularities, and Their Applications to Problems in Mechanics [in Russian], Metsniereba, Tbilisi (1979).
15. *Duduchava R. V.*, “General singular integral equations and basic problems of the flat theory of elasticity [in Russian],” Tr. Tbil. Mat. Inst. im. A. M. Razmadze, **82**, 45–89 (1986).
16. *Soldatov A. P.*, “Singular integral operators and elliptic boundary value problems [in Russian],” Sovremen. Mat., Fundament. Napravl., **63**, No. 1, 1–189 (2017).
17. *Stein I. M.*, Singular Integrals and Differential Properties of Functions [in Russian], Mir, Moscow (1972).
18. *Bateman G. and Erdeyi A.*, Tables of Integral Transformations [in Russian], vol. 1, Nauka, Moscow (1969).
19. *Bitsadze A. V.*, Some Classes of Partial Differential Equations [in Russian], Nauka, Moscow (1981).
20. *Duduchava R. V.*, “On the boundedness of the singular integration operator in Hölder spaces with weight,” in: Mat. Issled., **5**, No. 1, pp. 56–76, Shtiintsa, Kishinev (1970).
21. *Otelbaev M. and Soldatov A. P.*, “Integral representations of vector functions based on the parametrix of first-order elliptic systems [in Russian],” Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz., **61**, No. 1, 967–976 (2021).
22. *Bitsadze A. V.*, Boundary Value Problems for Second Order Elliptic Equations [in Russian], Nauka, Moscow (1966).
23. *Gantmakher F. R.*, Matrix Theory [in Russian], Nauka, Moscow (1988).
24. *Krein M. G.*, “Wiener–Hopf integral equations on the half-line with a kernel depending on the difference of the arguments [in Russian],” Uspekhi Mat. Nauk, **13**, No. 5, 3–120 (1958).
25. *Gokhberg I. Ts. and Krein M. G.*, “Systems of integral equations on the half-line with kernels depending on the difference of arguments [in Russian],” Uspekhi Mat. Nauk, **13**, No. 2, 3–72 (1958).
26. *Rudin W.*, Functional Analysis [in Russian], Mir, Moscow (1991).
27. *Palais R.*, Seminar on the Atiyah–Singer Index Theorem [in Russian], Mir, Moscow (1970).
28. *Krein S. G.*, Linear Equations in a Banach Space [in Russian], Nauka, Moscow (1971).
29. *Soldatov A. P.*, “Singular integral operators with a generalized Cauchy kernel on a piecewise smooth contour [in Russian],” Mat. Zamet. SVFU, **28**, No. 3, 70–82 (2021).
30. *Soldatov A. P.*, “Generalized singular Cauchy operator on a piecewise smooth curve [in Russian],” Dokl. RAN, Mat., Inform., Prots. Upr., **503**, 76–82 (2022).

Submitted November 4, 2022
Revised November 6, 2022
Accepted November 29, 2022

Alexander P. Soldatov
Federal Research Center “Informatics and Control”
of the Russian Academy of Sciences,
40 Vavilov Street, Moscow 119333, Russia;
Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics;
Moscow State University;
National Research University «MPEI»;
Academy of Science of the Republic of Sakha (Yakutia),
soldatov48@gmail.com