DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
Online www.rivistaddm.ch, 2020 (8), 92 - 114, DOI: 10.33683/ddm.20.8.5

OPEN ACCESS

ESPERIENZE DIDATTICHE

La geometria dell'origami

The geometry of origami

Achille Maffini
Liceo Scientifico G. Ulivi – Parma, Italia

✉ a.maffini@liceoulivi.it

Sunto / Il presente lavoro illustra il percorso di geometria dell'origami progettato all'interno delle esperienze del Liceo Matematico predisposte dal Liceo Scientifico Ulivi di Parma in collaborazione con l'Università degli Studi di Parma. Il percorso è stato in parte realizzato con un gruppo di alunni delle classi prime nell'a.s. 2018/19 (nell'a.s. 2019/20 non si è riusciti a replicarlo a causa dell'emergenza dovuta al COVID-19) e ha lo scopo di favorire una riflessione sull'assiomatica della geometria e sui suoi risvolti ontologici. Nel presente articolo viene presentato l'intero percorso (pensato sui primi tre anni del liceo scientifico); in particolare si presenteranno le attività svolte commentate (cercando così di far cogliere il senso delle specifiche scelte) e le indicazioni di possibili sviluppi per gli anni successivi.

Parole chiave: geometria; assiomi; origami.

Abstract / This work illustrates the path of origami geometry designed within the experiences of the "Liceo Matematico" planned by Liceo Scientifico Ulivi of Parma in collaboration with the University of Parma (Università degli Studi di Parma). The course was partially carried out with a group of grade 9 students in the s.y. 2018/19 (in the s.y. 2019/20 it was not possible to replicate it due to the emergency due to COVID-19) and has the purpose of promoting a reflection on the axiomatics of geometry and its ontological implications.
This article presents the entire path (thought over the first three years); in particular, each activities carried out are accompanied by a comment (thus trying to make the sense of the specific choices understood) and by indications of possible developments for the following years.

Keywords: geometry; axioms; origami.

1 Introduzione

Nell'a.s. 2018/19 il Liceo Scientifico Ulivi ha aderito, insieme ad altre scuole di Parma, al progetto di Liceo Matematico[1] proposto dal Dipartimento di matematica dell'Università di Parma. Oltre alle attività per gli allievi, nel progetto erano previsti dei momenti di formazione per gli insegnanti tra i quali dei moduli rivolti alle scuole secondarie di secondo grado[2] dal titolo "La geometria dell'origa-

1. Il progetto Liceo Matematico è nato su proposta dell'Università di Salerno nell'a.s. 2015/16 con lo scopo di affiancare alle attività curricolari ore aggiuntive in cui approfondire argomenti di matematica o favorire attività di carattere interdisciplinare. Per maggiori informazioni si rimanda al sito http://www.liceomatematico.it.
2. La scuola secondaria di secondo grado in Italia dura cinque anni e corrisponde all'ultimo anno di scuola media e alla scuola media superiore o scuole professionali nel Canton Ticino.

mi", proposto dal Prof. Saracco. Ogni scuola poteva poi, se voleva, declinarlo nella propria realtà con specifiche modalità e peculiari obiettivi. Il Liceo Ulivi ha inserito il modulo di "Geometria dell'origami" (di cui l'autore di questo articolo è responsabile, per quanto riguarda sia la progettazione che la proposta didattica) tra i cinque moduli proposti al gruppo di ragazzi delle classi prime che hanno aderito al progetto. A questo proposito sono state coinvolte otto classi prime (tra le nove presenti nell'Istituto) per un totale di 43 alunni divisi in due gruppi.
La scelta di progettare e proporre tale modulo è stata motivata dall'idea di come la geometria dell'origami si presti, attraverso la componente manipolativa che comporta, ad avvicinare gli studenti alla geometria. Come si vedrà, però, lo scopo del percorso proposto va oltre l'ambito pratico in quanto, di fatto, costituisce un pretesto per avvicinare gli studenti ad una riflessione epistemologica (implicita) sugli oggetti geometrici e sul ruolo della loro esistenza in termini di costruibilità, attraverso anche altri strumenti (come GeoGebra). Infine all'interno del modulo è previsto anche un excursus sui modelli di (semplici) teorie formali per avvicinare gli studenti al concetto di sistema assiomatico.
Il modulo di "Geometria dell'origami" si inserisce nel curriculum di geometria euclidea della scuola secondaria di secondo grado con il principale obiettivo di approfondire con altri strumenti e altri registri semiotici gli argomenti in ambito geometrico.
Nella didattica della matematica, il ruolo dell'insegnamento della geometria verte normalmente su due aspetti principali: proporre un esempio di sistema ipotetico deduttivo e, soprattutto all'ultimo anno della scuola secondaria di secondo grado quando si propongono riflessioni sulle geometrie non euclidee, vedere la struttura assiomatica legata ad un problema di coerenza, sganciandola così da presupposti semantici. Molta meno attenzione, invece, è data agli aspetti ontologici, i quali giocano tuttavia un ruolo fondamentale anche e soprattutto in ambito euclideo: parlare di oggetti geometrici significa, prima di tutto, stabilirne criteri di esistenza e costruibilità.
La geometria dell'origami si inserisce proprio su quest'ultimo campo d'indagine, secondo alcuni approcci che diventeranno la spina dorsale delle attività:

1. approccio manipolativo;
2. approccio epistemologico;
3. approccio contenutistico;
4. approccio dinamico-esplorativo.

La possibilità di fare costruzioni geometriche utilizzando i piegamenti della carta obbliga i ragazzi a confrontarsi con una manualità e una visione spaziale dei problemi di geometria piana che negli anni è sempre meno parte delle loro competenze specifiche. Il fatto stesso di risolvere anche semplici problemi di geometria (piana) dovendo operare in uno spazio tridimensionale comporta il dover rivedere le dimensioni dello spazio in termini diversi: in particolare lo spazio a tre dimensioni si configura come un metacontesto in cui gestire un problema di geometria piana. A questo si deve poi aggiungere come il foglio di carta dovrebbe essere un foglio trasparente, capace cioè di mostrare gli oggetti che si dovranno sovrapporre nelle varie costruzioni (soprattutto punti e rette).[3] Inoltre, il foglio di carta è al tempo stesso artefatto e strumento (con gli assiomi che lo determinano).
Le prime attività proposte nel modulo riguardano problemi di costruzioni risolvibili anche con riga e compasso (ad esempio la costruzione dell'asse di un segmento; del circocentro e baricentro di un triangolo; della bisettrice di un angolo) per mostrare come il nuovo metodo inglobi gli strumenti già presenti nella geometria euclidea. Questa fase, tra l'altro, è l'occasione per analizzare in modo critico gli assiomi euclidei e la loro importanza nella costruzione della *realtà matematica*.
L'aspetto fondamentale di questa prima fase, come detto, è legato al far sentire l'importanza (anche in termini euclidei) dei processi di costruzione degli oggetti geometrici, aspetto che a sua volta si ricollega al problema dell'esistenza degli oggetti geometrici (e matematici in generale). Il successivo

3. Nelle attività si sono utilizzati normalmente comuni fogli di carta, con l'indicazione di segnare i vari oggetti coinvolti (rette, punti) su entrambi i lati, per trattarli come se fossero trasparenti.

approccio ipotetico-deduttivo, proposto soprattutto nell'ordinaria attività didattica, diventa così lo strumento concettuale per giustificare la correttezza del risultato trovato.
Non trascurabile, in questa fase, è la ripresa del concetto di trasformazione geometrica il quale, al di là del suo utilizzo pratico, permette sia di fare collegamenti col concetto di funzione, sia di chiarire come le trasformazioni geometriche risolvano in un contesto statico, come il piano geometrico, aspetti apparentemente dinamici, senza introdurre la grandezza tempo.
Pensare al concetto di esistenza come tratto epistemologico della geometria euclidea permetterà non solo di analizzare gli assiomi euclidei in ottica ontologica, ma anche di valutarne i limiti. Se quindi nella prima fase ci si preoccupa di costruire gli oggetti geometrici con gli strumenti messi a disposizione dall'assiomatica di Euclide, nella seconda fase del modulo ci si concentra soprattutto sulla possibilità di poter rifare le stesse costruzioni effettuate con riga e compasso, ma sfruttando le opportunità offerte dalla nuova impostazione assiomatica, pensando agli assiomi dell'origami come nuovi strumenti messi a disposizione per la costruzione degli oggetti geometrici e, in generale, del sapere. In particolare viene analizzata la risoluzione, attraverso i piegamenti della carta, anche di problemi non risolvibili con riga e compasso (come ad esempio la trisezione dell'angolo o, in ambito algebrico, la costruzione geometrica che porta alla risoluzione delle equazioni di terzo grado e quindi alla duplicazione del cubo). In sostanza, devono cambiare le *regole del gioco* per permettere al gioco stesso di avere altre configurazioni o situazioni possibili. Questa idea del cambiamento delle regole del gioco può indurre quindi una riflessione più attenta e pratica sul concetto di sistema assiomatico.
Il continuo oscillare tra l'idea di gioco (e le sue regole) e la potenza degli strumenti operativi messi a disposizione sarà il filo conduttore di tutto il percorso.

2 Le *regole del gioco*: il sistema assiomatico della carta piegata

Innanzitutto è necessario fare una precisazione sul concetto di piano geometrico e ambiente di lavoro. Contrariamente al piano euclideo (illimitato, continuo e omogeneo) il piano origami è (normalmente) un quadrato; in ogni caso è limitato. Questo modifica il concetto di retta la quale è a sua volta un ente geometrico limitato. Inoltre, la distinzione terminologica tra *retta* e *piega* (riscontrabile nei vari sistemi assiomatici che si sono analizzati) denota non tanto la loro differenza dal punto di vista del risultato finale (alla fine una piega rappresenta una retta), quanto da quello della loro natura: le rette sono oggetti preesistenti, mentre le pieghe sono risultati di processi (di cui rette e punti sono gli elementi a cui è applicato il processo). Allo stesso modo si hanno all'interno della geometria dell'origami (come del resto nel caso della geometria euclidea) due tipi di punti: i punti come oggetti (al limite come costituenti di curve o figure, con un chiaro riferimento insiemistico) e i punti come risultato di processi (ottenuti cioè come intersezione di rette o di pieghe, con chiaro riferimento all'idea euclidea di punto come risultato di intersezione di curve). In questo senso alcune delle attività proposte in questo modulo possono essere utilizzate anche per un'approfondita riflessione sia sugli oggetti geometrici che sul rapporto tra gli stessi e gli oggetti che li individuano, per mostrare, in modo pratico, come un oggetto possa essere visto come reificazione di un processo (Sfard, 1991).
L'assiomatizzazione universalmente riconosciuta alla base della geometria degli origami è quella dei matematici B. Scimemi, H. Huzita (a cui si devono i primi sei assiomi) e K. Hatori (a cui si deve il settimo); d'ora in poi sarà indicata con **HH**. È possibile trovarla formulata in diversi lavori, come ad esempio in Newton (2009). Nelle varie formulazioni, però, sono spesso trascurate alcune condizioni o precisazioni, che approfondiremo nel seguito.

2.1 Gli assiomi HH ed N

Si riportano gli assiomi nella loro forma originale, come presentati in Lang (2015, traduzione dell'autore):

> «HH1. Dati due punti p_1 e p_2 c'è una piega che passa per entrambi.
> HH2. Dati due punti p_1 e p_2 c'è una piega che porta p_1 su p_2.
> HH3. Date due rette l_1 e l_2 c'è una piega che porta l_1 su l_2.
> HH4. Dato un punto p_1 e una retta l_1 esiste una piega perpendicolare a l_1 e passante per p_1.
> HH5. Dati due punti p_1 e p_2 e una retta l_1 c'è una piega che porta p_1 su l_1 e che passa per p_2.
> HH6. Dati due punti p_1 e p_2 e due rette l_1 e l_2 c'è una piega che porta p_1 su l_1 e p_2 su l_2.
> HH7. Dato un punto p_1 e due rette l_1 e l_2, c'è una piega perpendicolare a l_2 che porta p_1 su l_1».

L'assiomatizzazione proposta in Newton (2009)[4], indicata d'ora in poi come assiomatizzazione **N**, presenta alcune aggiunte, in termini di esistenza e unicità:

> «N1. Dati due punti P e Q c'è un'unica piega che passa per entrambi.
> N2. Dati due punti P e Q c'è un'unica piega che porta P su Q.
> N3. Date due rette r e s c'è una piega che porta r su s.
> N4. Dato un punto P ed una retta r c'è un'unica piega perpendicolare a r passante per P.
> N5. Dati due punti P e Q ed una retta r, c'è una piega che porta P su r e passa per Q.
> N6. Dati due punti P e Q e due rette r e s, c'è una piega che porta P su r e Q su s.
> N7. Dato un punto P e due rette r ed s c'è una piega che porta P su r ed è perpendicolare a s».

Rispetto ad **HH**, in **N** in tutti gli assiomi non solo è garantita l'esistenza di (almeno) una piega, ma in alcuni casi è esplicitata l'unicità. Anche in questa formulazione, però, ci sono diverse imprecisioni; vediamo di evidenziarle.

2.2 Osservazioni sugli assiomi

È facile osservare come in tutti gli assiomi compaia il termine (primitivo) piega. Nella maggior parte di essi, le pieghe si possono configurare come assi di simmetria di (particolari) simmetrie assiali, per cui in generale l'attività della piegatura si configura come un processo riconducibile a trasformazioni. Questa considerazione non è didatticamente trascurabile, poiché è nota la difficoltà degli studenti rispetto a questo concetto (il quale, come detto, permette di sostituire in contesti statici l'idea di movimento sottesa alla possibilità di "spostare" punti o rette).

Per quanto riguarda gli assiomi N1, N2 e N4 si osserva come garantiscano sia l'esistenza che l'unicità della piega (mentre gli originali HH1, HH2 e HH4 solo l'esistenza) per cui sono chiaramente più specifici.

L'assioma 5 è formulato in modo scorretto in entrambe le assiomatizzazioni. Infatti la piega richiesta deve essere perpendicolare al segmento individuato da P e dal suo corrispondente P' su r e deve passare per Q. Il triangolo PQP' è isoscele per cui P' esiste se la circonferenza di centro Q passante per P interseca la retta r; l'assioma dovrebbe quindi essere formulato in questa forma:

> N5a. Dati due punti P e Q ed una retta r *tale che la distanza di Q da r sia minore o uguale alla distanza di Q da P*, c'è una piega che porta P su r e passa per Q.

Un altro errore tecnico è presente in entrambe le formulazioni dell'assioma 7. Anche in questo caso l'esistenza della piega non è garantita, com'è facilmente verificabile, se le rette r e s sono parallele.

4. Per una maggiore leggibilità sono stati indicati i punti con le lettere P e Q e le rette con r e s.

Una formulazione più corretta potrebbe essere:

N7a. Dato un punto P *e due rette incidenti* r e s c'è una piega che porta P su r ed è perpendicolare a s.

Va inoltre osservato come in questo assioma il termine *piega* sia usato con entrambe le accezioni: come retta (oggetto) e come asse di simmetria legata al processo di piegatura.

Altre osservazioni riguardano poi direttamente la struttura e la terminologia presente negli assiomi. In particolare, negli altri assiomi in cui è garantita l'esistenza di una piega, ma non l'unicità, un'importante questione da porre sul piano didattico è stabilire quante possono essere nella fattispecie le pieghe possibili che soddisfano le determinate condizioni. Inoltre in entrambe le assiomatizzazioni il termine primitivo *retta* è visto, pensando al foglio di carta (cioè all'ambiente geometrico di riferimento), come segmento (al più prolungabile), ricollegandosi così alla concezione euclidea di retta nell'ottica di un infinito potenziale.
Va inoltre osservato come in entrambe le assiomatizzazioni manchi in modo esplicito l'assioma del compasso (terzo assioma euclideo;[5] il primo assioma euclideo coincide con HH1) e il quinto postulato (delle parallele) a sua volta sostituito dall'assioma HH4 (oppure N4).
Inoltre sia in **HH** che in **N** la condizione di esistenza è errata, in quanto ci sono casi in cui la piega non esiste (vedi Allegato 1).

Come detto, uno degli obiettivi principali che ci si pone è quello di mostrare come la geometria della carta piegata permetta di fare costruzioni non effettuabili con gli strumenti (riga e compasso) della geometria euclidea. Questo significa che devono esserci assiomi della geometria dell'origami non modellizzabili nella geometria euclidea. Come vedremo anche con l'attività con GeoGebra l'assioma più problematico è HH6. È infatti questo assioma che fa la differenza rispetto alla possibilità di costruzioni non fattibili con riga e compasso.

3 Assiomatizzazione OLM

L'assiomatizzazione proposta nel seguito, e che è stata utilizzata per lo sviluppo del modulo "Geometria dell'origami", parte dall'assiomatizzazione **N** con alcune modifiche o variazioni[6]; la chiameremo Assiomatizzazione Origami Liceo Matematico (**OLM**). Per questioni didattiche (che vedremo in seguito) gli assiomi 6 e 7 delle precedenti assiomatizzazioni sono stati invertiti, mentre per comodità di scrittura gli assiomi sono indicati solo dalla lettera A e dal numero corrispondente.
Nelle varie assiomatizzazioni reperibili e riportate in precedenza non sono esplicitati i termini primitivi, aspetto che invece si è ritenuto opportuno riportare esplicitamente nel percorso proposto, in quanto

5. Gli assiomi euclidei proposti sono quelli presenti in Euclide (1970):
I. Risulti postulato: che si possa condurre una linea retta da un qualsiasi punto a un altro punto.
II. E che una retta terminata si possa prolungare continuamente in linea retta.
III. E che si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro ed ogni distanza.
IV. E che tutti gli angoli retti siano uguali tra loro.
V. E che, se una retta venendo a cadere su due rette forma gli angoli interni e dalla stessa parte minore di due retti, le due rette prolungate illimitatamente verranno ad incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti.
6. In particolare ce n'è una di carattere terminologico. Alcune formulazioni (come in https://it.wikipedia.org/wiki/Assiomi_di_Huzita-Hatori) parlano di piegatura anziché di piega. Detto diversamente, si fissa più l'attenzione sul processo che sull'oggetto finale (la piega). Come visto, in N si parla di pieghe, mentre in HH si pone più l'attenzione sul processo ("we can fold"). Si è scelto di utilizzare il termine piega anziché piegatura in quanto la piegatura è fatta per ottenere una piega, cioè una retta funzionale alla costruzione. Usare il termine piegatura darebbe invece più enfasi al processo, rischiando di sviare l'attenzione sul vero scopo del processo. Naturalmente anche questa è una scelta e, in quanto tale, discutibile.

si ricollega alla modalità con cui viene presentata normalmente la geometria nelle classi prime; il tentativo, anche in questo caso, è di far percepire i termini primitivi come termini vuoti e la necessità degli assiomi come loro definizioni implicite. In questo modo la geometria dell'origami si presenta strutturalmente, come teoria, allo stesso modo della geometria che già conoscono. Poiché negli assiomi si parla di pieghe e rette occorre premettere un assioma 0 secondo cui, in accordo a quanto detto nel par. 2.2, le pieghe sono rette.

Termini primitivi: punto, retta, piega.
Assiomi:[7]
A0. Ogni piega è una retta.
A1. Dati due punti P e Q, esiste un'unica piega che passa per entrambi.
A2. Dati due punti P e Q, esiste un'unica piega che porta P su Q.
A3. Date due rette r e s, esiste almeno una piega che porta r su s.
A4. Dati un punto P e una retta r, esiste un'unica piega perpendicolare a r che passa per il punto P.
A5. Dati due punti P e Q e una retta r, tale che la distanza di Q da r sia minore o uguale alla distanza di Q da P, esiste almeno una piega passante per Q che porta P su r.
A6. Dati un punto P e due rette incidenti r e s, esiste un'unica piega perpendicolare a s che porta P su r.
A7. Dati due punti P e Q e due rette incidenti r e s, esiste e si può costruire almeno una piega che porta P su r e Q su s.

La formulazione più controversa è quella dell'assioma A7, ma questo proprio perché l'assioma in sé è problematico, in quanto in una formulazione più generale potrebbero non essere garantite né l'esistenza né l'unicità. In particolare, la condizione che le rette siano incidenti di per sé non è vincolante, ma con detta condizione risulta garantita l'esistenza di (almeno) una piega, garanzia che invece non si avrebbe se le rette fossero parallele. Con la formulazione proposta nell'assioma A7 si è quindi operata una scelta che permette di rendere l'assioma sempre operativo; si ritiene però importante una riflessione che permetta di capire la necessità e la portata di questa scelta. Poiché queste disquisizioni esulano dagli obiettivi strettamente didattici del percorso, si è preferito inserirle, per chi fosse interessato, nell'Allegato 1.

4 Le attività con gli studenti

Dal punto di vista didattico, il modulo proposto è suddiviso in tre percorsi:
1. Assiomatizzazioni e costruzioni geometriche di tipo manipolativo.
2. Geometria dinamica ed estensioni algebriche.
3. Sistemi formali.

A sua volta il primo percorso, sviluppato con gli studenti delle classi prime, si suddivide in due fasi: costruzioni con gli assiomi della geometria euclidea e costruzioni con gli assiomi della geometria dell'origami.
I primi due percorsi hanno lo scopo di portare lo studente a percepire limiti e potenzialità dei vari contesti geometrici presentati, mentre il terzo si pone come una riflessione finale sul ruolo dei sistemi formali in ottica strutturale.

7. Salvo diverse indicazioni, in tutti gli assiomi si sottintende che i punti e le rette di cui si parla siano distinti/e.

Per quanto detto, le attività proposte nella fase relativa alla geometria dell'origami hanno come scopo principale quello di prospettare diverse assiomatizzazioni e modellizzazioni degli enti geometrici, sempre in contesto euclideo (se per contesto euclideo intendiamo quello individuato dal quinto postulato, cosa diversa dal contesto *descritto* dagli assiomi euclidei). L'obiettivo principale è far cogliere agli studenti che non si sta facendo un'altra geometria, quanto il fatto che fare geometria significa anche poter costruire gli oggetti utilizzati e questo dipende dagli strumenti a disposizione.
Per far capire la differenza di realtà costruibili con presupposti (assiomatici) diversi vengono utilizzati i termini *gioco* e *regole del gioco*, anche per far cogliere, nei limiti del possibile, il carattere sintattico di una teoria (matematica). Lo scopo è innanzi tutto quello di favorire negli studenti una riflessione sulla geometria euclidea (oltre a fornire loro uno strumento alternativo, ed essenzialmente manipolativo, per la costruzione degli oggetti geometrici), ma anche di far capire come con la geometria degli origami si possano fare costruzioni non realizzabili con riga e compasso. Quest'ultimo però è un obiettivo alto che necessita di alcuni "atti di fede" da parte dello studente, come ad esempio, accettare che la costruzione della trisezione dell'angolo non sia realizzabile con riga e compasso.
Nel dettaglio, le attività previste nel primo percorso (suddiviso, come detto, in due fasi) sono le seguenti:[8]
fase 1
Attività 1 – Costruiamo con le regole del gioco euclideo
Attività 1A – La (prima) gara delle pieghe
Attività 1B – La (seconda) gara delle pieghe
fase 2
Attività 2 – Costruiamo con le regole del gioco origami
Attività 3 – Oltre gli assiomi di Euclide: trisechiamo l'angolo
Per cogliere meglio lo scopo delle attività proposte, sono opportuni alcuni commenti e/o osservazioni che permettono di capire le scelte fatte e le finalità.

4.1 Descrizione e commento delle attività proposte nella prima fase del primo percorso

4.1.1 Costruiamo con le regole del gioco euclideo

Nella prima attività proposta gli studenti lavorano a gruppi e la consegna che viene data loro è articolata in diversi punti (si veda l'Allegato 2 – attività 1): riportare i termini primitivi e gli assiomi della geometria euclidea di cui sono a conoscenza, riportare le definizioni di alcuni enti geometrici (asse di un segmento, circocentro e baricentro di un triangolo, bisettrice di un angolo, retta perpendicolare e retta parallela ad una retta data, ortocentro e incentro di un triangolo, triangolo equilatero), eseguire le costruzioni di questi enti geometrici con riga e compasso, riflettere su quali assiomi siano stati utilizzati e dimostrare che le costruzioni svolte determinano effettivamente gli enti geometrici richiesti.
L'attività ha diversi obiettivi, con difficoltà crescenti. Nel dettaglio:

1. ripassare le nozioni geometriche elementari, permettendo così un collegamento diretto dell'attività con quanto proposto in classe durante le ore curricolari e mettere in particolare rilievo il ruolo dei termini primitivi (come termini vuoti) e degli assiomi come definizioni implicite dei termini primitivi;
2. riflettere sul ruolo degli assiomi come *regole del gioco*, ponendosi quindi in una condizione (pseudo) ludica rispetto alla scoperta geometrica;
3. sottolineare le finalità (e preoccupazioni) ontologiche della geometria euclidea, con particolare riguardo all'idea di esistenza associata alla costruibilità;
4. far cogliere il ruolo degli assiomi non come vincoli quanto come strumenti che permettono di giocare e costruire gli oggetti del gioco; in questo senso quest'attività, come le successive, si

8. Le schede-studente sono state inserite nell'Allegato 2; le risposte o le risoluzioni di alcune attività sono riportate nell'Allegato 3.

pongono come meta-obiettivo quello di far sentire il contesto costruito dagli assiomi come un contesto *sicuro* e *garantito*. Dare rilievo e importanza al ruolo della costruibilità degli oggetti geometrici diventa anche propedeutico a quello che sarà poi sviluppato al terzo anno con la geometria analitica, intesa non tanto come traduzione algebrica di oggetti geometrici, quanto come contesto in cui costruire e gestire con strumenti algebrici gli oggetti geometrici;
5. porre il problema della continuità (implicita) delle curve (in questo caso rette e circonferenze) nella geometria euclidea, ma non garantita dagli assiomi e senza la quale l'individuazione di alcuni punti (come il terzo vertice del triangolo equilatero) non sarebbe scontata. In particolare questa fase può diventare un importante momento per analizzare criticamente l'impostazione assiomatica del libro di testo (nel caso ricalchi l'assiomatizzazione di Hilbert) e quella presente negli Elementi di Euclide;
6. la costruzione della parallela con riga e compasso permette di mostrare come in ambito euclideo l'esistenza della parallela sia garantita dai primi quattro assiomi per cui ciò che afferma (realmente) il quinto postulato è l'unicità.

Molte delle costruzioni proposte sono probabilmente già note agli studenti dalla scuola secondaria di primo grado[9] ma, presumibilmente, senza che abbiano piena consapevolezza del perché tali costruzioni si realizzino effettivamente così.

Per tale ragione il percorso di geometria dell'origami dovrebbe essere proposto quando gli alunni hanno acquisito una buona padronanza dei concetti geometrici (quindi almeno dopo che siano stati introdotte nelle ore curricolari i criteri di congruenza dei triangoli e i teoremi relativi al parallelismo tra rette) in modo da poter richiedere loro anche la giustificazione razionale delle costruzioni. Tra le dimostrazioni richieste alcune sarebbero più semplici se fossero note le proprietà della circonferenza (come ad esempio la giustificazione della costruzione di un'altezza di un triangolo), ma si può operare anche solo con le nozioni che hanno gli studenti del primo anno, eventualmente con l'aiuto dell'insegnante. Due problemi che difficilmente vengono risolti dagli studenti del primo anno e potrebbero rimanere aperti (ma è opportuno tenerli tali, come domande a cui rispondere in futuro, in quanto affrontarli adesso rischia di far perdere di vista l'obiettivo principale di tutto il percorso) sono le dimostrazioni dell'esistenza dell'ortocentro e dell'incentro di un triangolo.

Infine, per quanto riguarda l'analisi del punto 3 dell'attività 1 (Allegato 2), si tratta di un'occasione per far notare agli studenti come gli oggetti[10] utilizzati (riga e compasso) siano la traduzione pratica del primo e terzo assioma euclideo. Questa osservazione è poi propedeutica a far comprendere come il vero strumento non sia l'oggetto fisico, quanto l'assioma, di cui l'oggetto è solo una sua (possibile) esternazione. Si potrà così introdurre già in questa fase la distinzione tra *strumento* e *artefatto*.[11] A questo aspetto si ricollega la riflessione sul ruolo delle rappresentazioni iconiche in geometria, con il noto problema della tendenza a confondere, da parte di molti studenti, gli enti geometrici con la loro rappresentazione.

4.1.2 Le gare delle pieghe

Nelle attività 1A e 1B (vedi Allegato 2) gli studenti sono invece direttamente introdotti al processo di piegatura e alle problematiche relative, rispettivamente, agli assiomi A5 e A7, senza ovviamente no-

9. La scuola secondaria di primo grado in Italia dura tre anni e corrisponde ai primi tre anni di scuola media nel Canton Ticino.
10. Il termine "oggetto" è utilizzato in questo contesto in modo generico. Di fatto, parlare di riga e compasso significa parlare di artefatti, intesi come oggetti prodotti dall'uomo per favorire il processo di conoscenza (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008). Il termine "strumento", invece si riferisce all'aspetto concettuale sotteso all'artefatto, precisandone di conseguenza gli schemi di utilizzo. Sul piano geometrico, ad esempio, il primo assioma di Euclide ("Per due punti distinti passa una ed una sola retta") sarebbe uno strumento, mentre la riga un artefatto. Qui più propriamente si dovrebbe quindi parlare di artefatto. Si è scelto il termine "oggetto" per non rischiare di perdere di vista il senso complessivo del discorso.
11. Le attività con gli origami e quelle con GeoGebra rappresentano a loro volta l'occasione per introdurre altri artefatti (le piegature per l'origami e i comandi del programma per GeoGebra).

minare tali assiomi. Agli studenti vengono dati dei fogli su cui sono disegnate alcune figure racchiuse da riquadri (vedi Figure 1 e 3) raffiguranti linee e punti in posizioni diverse.
Gli strumenti a loro disposizione sono: forbici, matita, righello e compasso.
Viene chiesto loro di ritagliare i riquadri e di cercare di svolgere le consegne assegnate (fare alcune pieghe con specifiche caratteristiche); in particolare nell'attività 1A si propongono costruzioni relative all'assioma A5, mentre nell'attività 1B si propongono costruzioni relative all'assioma A7.
Le consegne assegnate hanno lo scopo di far cogliere agli studenti condizioni di esistenza, di non esistenza e di unicità delle soluzioni in relazione alle varie configurazioni iniziali.
Le attività sono proposte sotto forma di gara non per creare competizione, ma per dar loro una connotazione ludica, e il loro scopo è quello di far cogliere il senso delle limitazioni che saranno introdotte negli assiomi A5 e A7. Le situazioni più delicate sono le ultime due dell'attività 1A dell'Allegato 2, mostrate nelle Figure 1 e 2 per il caso che porta ad un'unica soluzione e nelle Figure 3 e 4 per il caso che non porta a nessuna soluzione: in particolare la situazione che conduce all'impossibilità della costruzione richiede una giustificazione non banale per gli studenti. A tale proposito può venire in aiuto il compasso e l'insegnante potrebbe, dopo qualche tentativo andato a vuoto, chiedere come mai sia stata richiesta la presenza di quell'artefatto visto che fino ad allora non era stato usato. Tracciando quindi una circonferenza di centro Q e raggio QP gli studenti potrebbero avere qualche aiuto in più per arrivare alla conclusione.

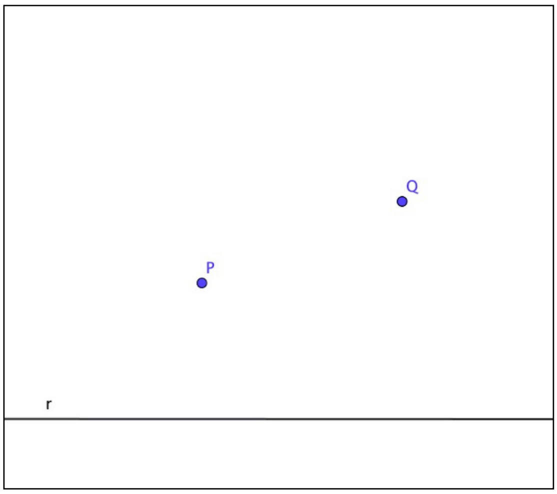


Figura 1. La consegna agli studenti.

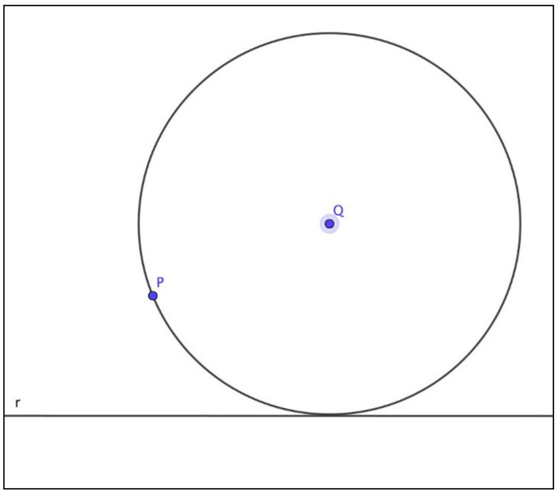


Figura 2. La risposta con l'uso del compasso.

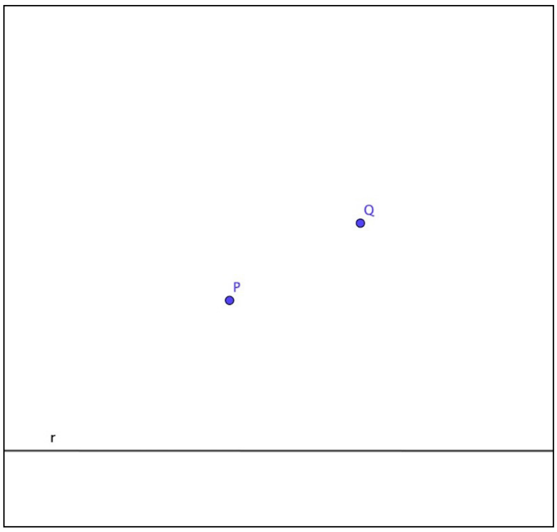


Figura 3. La consegna agli studenti.

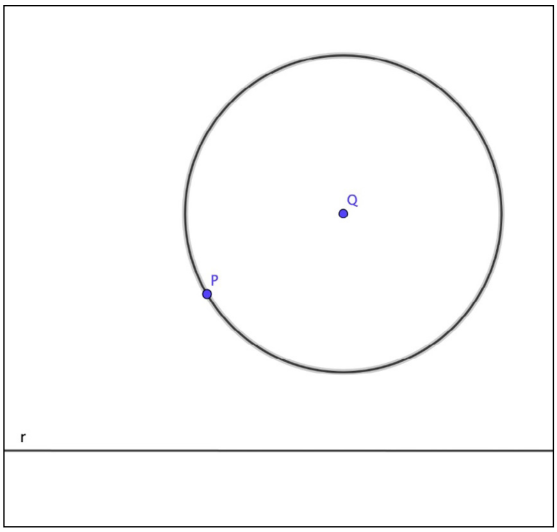


Figura 4. La risposta con l'uso del compasso.

Nel primo caso (Figure 1 e 2) risulta così visivamente evidente come la piega richiesta sia unica: quella passante per Q e che porta P nel punto di tangenza tra la retta e la circonferenza, mentre nel secondo caso non si hanno soluzioni perché non ci sono intersezioni tra retta e circonferenza.
Le condizioni di impossibilità aprirebbero, a questo punto, una riflessione sulla formulazione più opportuna di un assioma in relazione sia alle sue potenzialità che ai suoi limiti, riflessione che permette a sua volta di giustificare agli studenti la scelta fatta per l'assioma A5.

Per quanto riguarda invece l'attività 1B, il suo scopo è quello di introdurre l'assioma A7, mostrandone sia le criticità che le potenzialità. In particolare le situazioni riportate nell'attività (vedi le successive Figure 5, 7 e 9) sono proposte per evidenziare come, nel caso di rette parallele, l'esistenza della piega non sia assicurata (questo, come indicato anche nell'approfondimento dell'Allegato 1, dipende dall'esistenza o meno di tangenti comuni a due parabole distinte). In particolare, le tre situazioni permettono di ottenere due soluzioni (Figura 5 e 6), nessuna soluzione (Figura 7 e 8) e una soluzione (Figura 9 e 10). Questo consente così di giustificare la richiesta che le rette siano incidenti, caso in cui l'esistenza (ma non l'unicità) risulta sempre garantita.

Figura 5. Caso con due soluzioni: consegna.

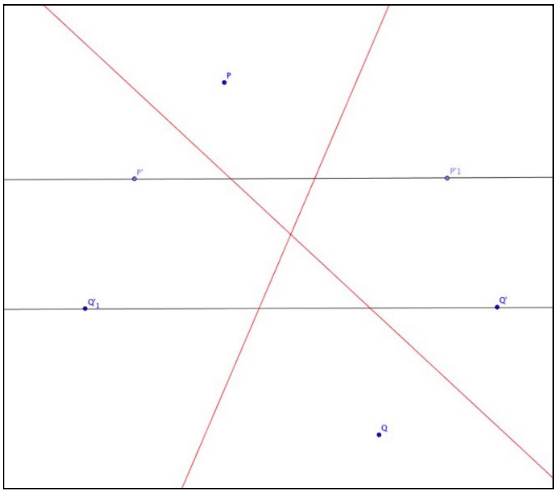


Figura 6. Soluzioni.

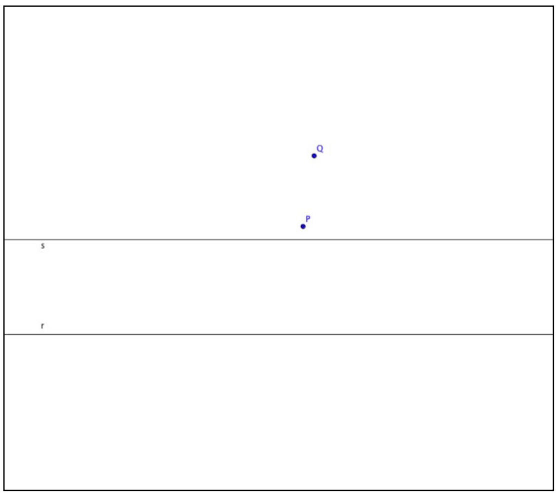


Figura 7. Caso con nessuna soluzione: consegna.

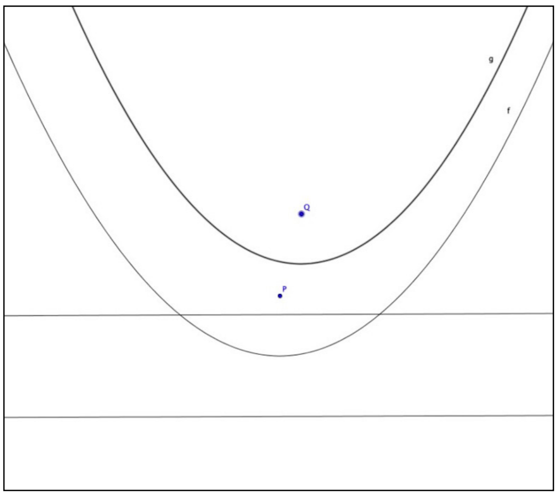


Figura 8. Soluzione.

Figura 9. Caso con una soluzione: consegna.

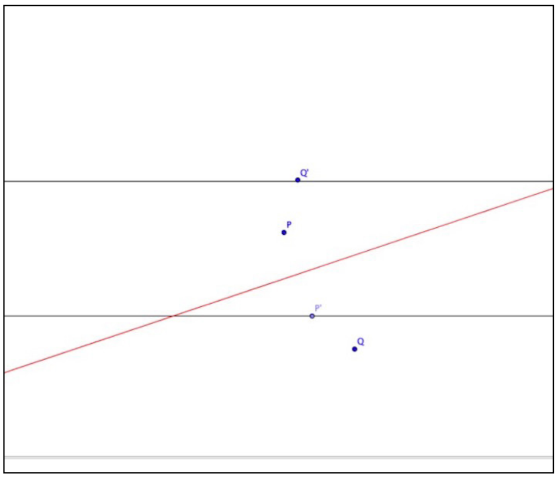


Figura 10. Soluzione.

4.1.3 Costruiamo con le regole del gioco origami

L'attività 2 (vedi Allegato 2) serve per introdurre in modo operativo l'assiomatica dell'origami. Agli studenti vengono presentati gli assiomi OLM e viene chiesto, oltre a un'analisi linguistica dei contenuti, di rifare con gli strumenti dell'origami le stesse costruzioni realizzate con riga e compasso nell'attività 1 e di confrontare le due modalità. Gli studenti lavorano sempre a gruppi, ma l'unico materiale che hanno a disposizione sono fogli di carta quadrati semitrasparenti.

Anche in questo caso lo scopo principale è far percepire gli assiomi come strumenti operativi in grado di fare quanto meno "le stesse cose" che si possono fare con gli assiomi euclidei (una bozza di risoluzione dell'attività è contenuta nell'Allegato 3).

Entrando più nel merito dell'attività, va sottolineato che per effettuare le costruzioni con riga e compasso, previste nell'attività 1 dell'Allegato 2, i ragazzi dovrebbero già avere i prerequisiti necessari che ne facilitino lo svolgimento, mentre con il piegamento della carta potrebbero esserci delle difficoltà sia sul piano operativo/concettuale, sia su quello più strettamente manipolativo. Per questo è necessario che l'insegnante segua in modo più specifico lo svolgimento delle varie operazioni fornendo indicazioni e suggerimenti di lavoro.

Non è però improbabile che alcuni studenti abbiano più dimestichezza e manualità con la carta piegata. Purtroppo non è possibile un parallelo/confronto con le analoghe costruzioni con riga e compasso, poiché, come detto, probabilmente per diversi studenti molte tra le costruzioni proposte erano già note dalla scuola secondaria di primo grado.[12]

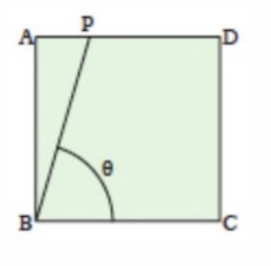
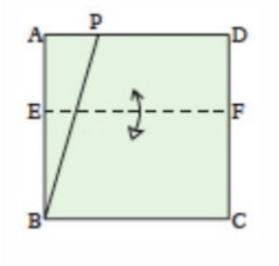
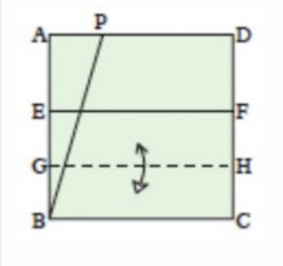
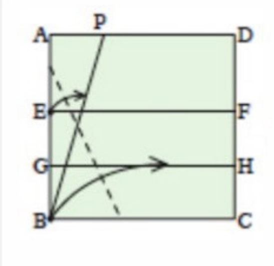
Rispetto a quella riportata in OLM nell'assiomatizzazione proposta nell'attività 2 (vedi Allegato 2) manca l'assioma A0. Le richieste al punto 1 dell'attività dovrebbero da una parte far capire le differenze e le analogie tra i termini *piega* e *retta* e dall'altra far cogliere la necessità di dire, da qualche parte, che le pieghe in ultima analisi sono rette. L'obiettivo quindi è quello di far sentire l'assioma A0 come una necessità, per cui al termine della discussione sulle risposte al punto 1 si tratterà di rivedere l'impianto assiomatico con l'aggiunta di tale assioma.

Infine, va osservato come il verbo *portare* sia usato nella formulazione degli assiomi fornita agli alunni in senso intuitivo e dinamico, esplicitando quindi l'aspetto operativo/manipolativo alla base delle attività dell'origami.

12. Non si esclude che anche l'origami sia un'attività già nota ad alcuni studenti, sia in base al proprio percorso di studi che per interesse personale, eventualità che in effetti si è presentata per un paio di ragazzi.

4.1.4 Oltre gli assiomi di Euclide: trisechiamo l'angolo

Anche l'attività 3 dell'Allegato 2 si svolge a gruppi ed ha come scopo la costruzione della trisezione di un angolo con gli strumenti (assiomi) dell'origami. L'attività vera e propria è preceduta da una breve illustrazione del problema della trisezione dell'angolo e, più in generale, su cosa significhi che un problema geometrico non sia risolvibile con riga e compasso.
Diversamente dalle altre attività in cui gli studenti dovevano cimentarsi in modo sperimentale nella ricerca della soluzione richiesta, in questa gli studenti, dopo l'introduzione iniziale, devono svolgere la trisezione dell'angolo seguendo le indicazioni fornite dalla scheda, cercando soprattutto di comprenderle e realizzarle correttamente.
I materiali a disposizione sono fogli di carta quadrati, un goniometro (per controllare la correttezza del risultato) ed eventualmente un righello e una matita per segnare l'angolo e le semirette che risolvono il problema.
La costruzione richiesta presuppone diverse congetture (come ad esempio che il prolungamento al punto 7 passi per B) che necessiterebbero di una dimostrazione. Inoltre la verifica finale di per sé non basta per dire che la costruzione ha raggiunto lo scopo: anche in questo caso quindi l'attività dovrebbe concludersi con una dimostrazione. Tale dimostrazione (riportata nell'Allegato 3) non è detto sia alla portata di un ragazzo al primo anno di scuola secondaria di secondo grado, per cui sta all'insegnante decidere se proporla o meno in base al livello del gruppo classe e al periodo scolastico (non necessariamente al primo anno) in cui viene svolta l'attività.
Nella costruzione il passaggio più delicato è senza dubbio il quarto (si veda la **Figura 11**, in cui sono riportati i passaggi della costruzione così come sono proposti agli studenti nell'Attività 3), cioè l'applicazione dell'assioma A7. In questa fase non è improbabile che i ragazzi incontrino diverse difficoltà nel momento in cui devono sovrapporre i punti alle rette. Nel lavoro di gruppo è quindi richiesto ai componenti una stretta collaborazione reciproca per analizzare insieme come fare per ottenere lo scopo.

			
1. Posizione iniziale.	2. Fai una piega EF in modo che sia parallela ai lati del quadrato.	3. Porta BC su EF e sia GH la piega così ottenuta.	4. Porta E su BP e B su GH.

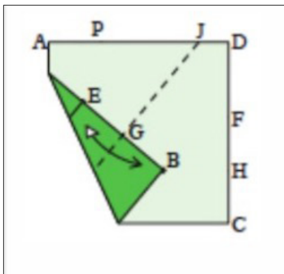
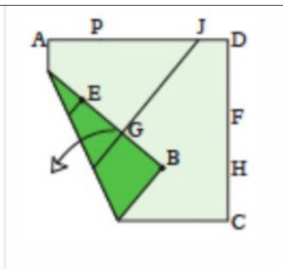
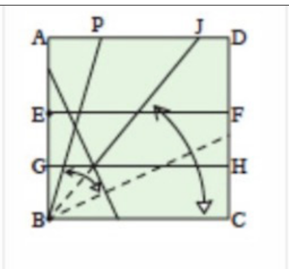
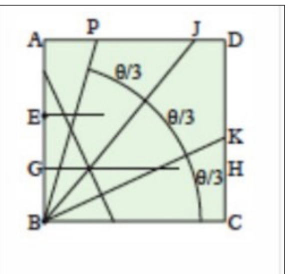
			
5. Porta B su E in modo da continuare la piega che termina in G (piega GJ).	6. Riporta B nella posizione iniziale.	7. Continua la piega che parte da J fino a B. Porta BC su BJ.	8. Verifica con un goniometro che i tre angoli PBJ, JBK e KBC abbiano la stessa ampiezza.

Figura 11. Istruzioni per la trisezione dell'angolo.

5 Il percorso con gli studenti: risultati e criticità

Le attività con gli studenti svolte a gruppi[13] con le modalità descritte nelle schede dell'Allegato 2, sono state proposte tra gennaio e febbraio del 2019 (nelle Figure 12, 13 e 14 si possono vedere tre gruppi di studenti mentre svolgono una delle attività proposte).
Per la parte del modulo "Geometria dell'origami" prevista per la classe prima sono stati fissati otto incontri di un'ora ciascuno, visto che per ogni attività erano previsti circa 45 minuti di svolgimento (preceduti da una breve introduzione) e mezz'ora (suddivisi tra quindici minuti al termine dell'incontro e quindici all'inizio dell'incontro successivo) di discussione collettiva sui risultati trovati, discussione che a sua volta avrebbe introdotto la successiva attività.

Figura 12. Studenti al lavoro.

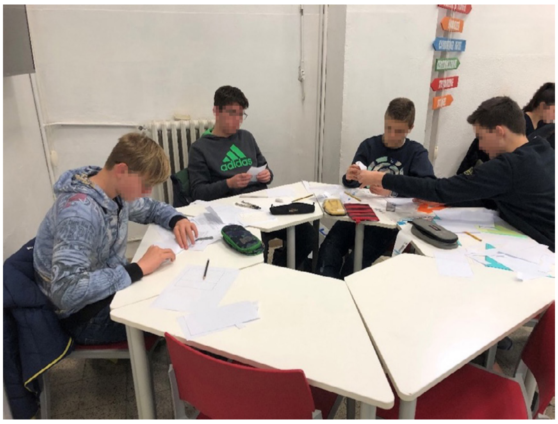


Figura 13. Studenti impegnati nella fase di piegatura.

Figura 14. Studenti impegnati nella fase di controllo dei risultati.

Gli studenti che hanno aderito al potenziamento matematico (circa una quarantina) provenivano da classi diverse e questo ha costituito un primo problema, in quanto i prerequisiti geometrici non erano comuni a tutti e, quando presenti, non era detto fossero stati sviluppati allo stesso modo. Rispetto al percorso progettato è stata quindi necessaria una prima introduzione generale (della durata di circa due ore) sul ruolo degli assiomi in geometria e sugli aspetti costruttivi alla base degli stessi, fase che ha comportato un inevitabile slittamento dei tempi, rendendo così difficile un'analisi critica degli

13. I gruppi erano formati in genere da 4-5 studenti provenienti dalla stessa classe.

assiomi come previsto dal progetto. In generale, comunque, le costruzioni con riga e compasso sono state svolte dai più senza particolari problemi. Quando, in fase di progettazione, si era fissata un'ora per lo svolgimento delle singole attività si era ritenuto il tempo ampiamente sufficiente, pensando di avere anche il tempo per la condivisione dei risultati; invece, alla fase pratica delle attività, sono emerse difficoltà tecniche significative dovute alla scarsa manualità e senso spaziale. Tali difficoltà hanno costretto la maggior parte degli studenti ad occupare con l'attività tutto il tempo messo a disposizione. Ad esempio, le sovrapposizioni sono avvenute non attraverso delle pieghe, ma "per spezzate", nel senso che la carta è stata più stropicciata che piegata. Un'altra tipica difficoltà è stata capire come modificare l'impostazione di una piega per raggiungere lo scopo, non approfittando appieno della possibilità di "far scivolare" il foglio sul foglio stesso prima di marcare la piegatura.
Inoltre, la relativa amalgama tra i gruppi ha reso poco significativo il ruolo della competizione (in senso ludico) con cui alcune attività sono state proposte.
Circa metà degli studenti è riuscito a trovare le motivazioni all'impossibilità delle costruzioni nelle attività 1A e 1B. Per la maggior parte (circa due terzi) degli studenti è stato invece più complesso individuare quali fossero le situazioni con più soluzioni e solo i gruppi più collaborativi sono riusciti a trovarle correttamente.
Tra le varie attività proposte, poi, quelle che hanno creato più difficoltà sono state, come era presumibile, la ricerca di più soluzioni nel caso dell'assioma A7 (in genere una volta trovata una soluzione non veniva colta la necessità o, come è stato verbalizzato dagli studenti, il senso, di cercarne altre) e la trisezione dell'angolo, che risulta indubbiamente l'attività più complessa sul piano tecnico.
In sostanza, oltre agli obiettivi che ci si era posti, le attività con l'origami hanno permesso di evidenziare indirettamente come i ragazzi facciano fatica a relazionarsi con modelli non usuali che richiedono abilità manuali specifiche, le quali a loro volta permettono di avere una più chiara percezione degli oggetti e dei concetti coinvolti. I primi ad arrivare alle conclusioni non sono stati necessariamente "i più bravi", quanto coloro che hanno evidenziato una maggiore abilità pratica, denotando competenze non strettamente sviluppate in ambito scolastico.
Va comunque detto che la maggior parte degli studenti, seppure con tempi diversi, ha portato a termine le richieste e, al termine del percorso, quasi tutti (salvo 5-6 ragazzi) sono riusciti sia a costruire la trisezione dell'angolo (facendo le pieghe richieste) che a completare la scheda indicando quali assiomi erano stati applicati nei vari passaggi.
Ciò che indubbiamente è risultato troppo elevato come obiettivo, almeno per i ragazzi del primo anno, è stata la riflessione epistemologica sui vari aspetti legati agli assiomi e al loro utilizzo.
Alla luce di quanto emerso, sarebbe opportuno, in futuro, proporre questo percorso più avanti nell'anno scolastico e con gruppi più omogenei. Anche in base a queste considerazioni, nell'a.s. 2019/20 si è deciso di formare una classe intera per il potenziamento e proporre il percorso sull'origami in marzo. Purtroppo la chiusura delle scuole in Italia a causa dell'emergenza sanitaria non ha permesso di attivare il modulo.

6 Sviluppi successivi

Al di là dei loro scopi specifici, le attività proposte nelle classi prime, afferenti la prima parte del modulo "Geometria dell'origami", vogliono essere l'inizio di un percorso che porti da una parte ad approfondire e dall'altra a riflettere su questioni epistemologicamente rilevanti della matematica. Per fare questo, come detto all'inizio del par. 4, il percorso illustrato è un segmento del modulo "Geometria dell'origami", il quale proseguirà negli anni successivi per sviluppare e approfondire aspetti relativi a diversi ambiti, sia legati allo specifico percorso iniziato con gli origami, sia (come vedremo nel par. 8) di carattere più generale. In particolare tali approfondimenti saranno di tipo

1. geometrico: utilizzando gli strumenti di geometria dinamica per proporre un altro ambiente di lavoro con nuovi strumenti teorici;
2. algebrico: vedendo l'applicazione di quanto appreso con il metodo del piegamento della carta e con GeoGebra per risolvere (in modo approssimato) equazioni di terzo grado;
3. analitico: studiando le costruzioni e le proprietà della parabola per meglio comprendere e motivare i risultati ottenuti nelle attività riguardanti l'analisi dell'assioma A7 (attività 1B dell'Allegato 2 e attività 2G dell'Allegato 4). In particolare:
   a. parabola, relative proprietà e inviluppo;
   b. problema delle tangenti comuni a due parabole;
   c. punti impropri e coordinate omogenee;
4. sintattico: studiando (semplici) sistemi formali e geometrie finite come applicazioni e approfondimento del metodo assiomatico.

Rispetto ai punti 1, 2 e 4 precedenti, nei prossimi paragrafi sono proposte alcune attività che possono costituire un'ipotesi di lavoro per gli sviluppi di questi percorsi.

7 Dalla carta a GeoGebra

In questo paragrafo viene descritto un possibile approfondimento del percorso di "Geometria dell'origami" che ha lo scopo di proporre il software di geometria dinamica come ulteriore ambiente di lavoro (dopo riga-compasso e origami) per la costruzione di oggetti geometrici.
Come visto in precedenza, nella tecnica del piegamento risulta fondamentale il concetto di trasformazione geometrica. In particolare, molte costruzioni si basano sulla possibilità di sovrapporre punti a punti o di fare in modo che un punto appartenga ad una retta (o che una retta passi per un punto). I software di geometria dinamica si basano naturalmente sull'assiomatizzazione euclidea, ma hanno al loro interno strumenti che permettono di andare oltre e di affidare a qualche sorta di approssimazione la risoluzione di alcuni problemi. Da questo punto di vista, lo strumento principale presente in programmi come GeoGebra che permette di superare l'ambito euclideo è quello che fornisce la possibilità di muovere gli oggetti per imporre passaggi o appartenenze. Questo strumento non resiste alla prova del trascinamento (proprio perché non siamo in contesto riga e compasso). Inoltre, questa modalità di "trascinare i punti" per cercare risultati presenta l'inconveniente di cercare risultati su un continuo lavorando in un ambiente discreto com'è di fatto il piano di GeoGebra: sul piano didattico si tratta quindi di trovare un equilibrio tra la possibilità di trovare un risultato e il grado di approssimazione accettabile per lo stesso.
Un'ulteriore precisazione è che nel piano di GeoGebra le rette ritornano a essere (potenzialmente) illimitate, in quanto non c'è più il vincolo della forma quadrata del foglio. Per ricreare quindi l'ambiente *foglio di carta* sarà opportuno in alcuni casi[14] fare la costruzione all'interno di un quadrato.
A fronte di queste considerazioni, si propone la seguente revisione (AG1-AG7) degli assiomi A1-A7 in ottica GeoGebra.

14. Anche se non indispensabile, si ha l'intenzione di riproporre l'analogo dell'ambiente foglio di carta nell'attività sulla trisezione dell'angolo con GeoGebra.

7.1 Assiomatizzazione GeoGebra (AG)

Termini primitivi: gli stessi della geometria euclidea.

Assiomi:

AG1. Dati due punti P e Q c'è un'unica retta passante per entrambi.
AG2. Dati due punti P e Q c'è un'unica simmetria assiale che trasforma P in Q.
AG3. Date due rette r e s c'è una simmetria assiale che trasforma r in s.[15]
AG4. Dato un punto P e una retta r c'è un'unica retta perpendicolare a r passante per P.
AG5. Dati due punti P e Q e una retta r tale che la distanza di Q da r sia minore o uguale alla distanza di Q da P c'è una simmetria assiale tale che il trasformato di P appartenga a r ed il cui asse di simmetria passa per Q.
AG6. Dato un punto P e due rette incidenti r e s c'è una simmetria assiale tale che il trasformato di P appartenga a r ed il cui asse di simmetria è perpendicolare a s.
AG7. Dati due punti P e Q e due rette incidenti r e s, esiste e si può costruire una simmetria assiale tale che il trasformato di P appartenga a r e il trasformato di Q appartenga a s.

Vale la pena osservare come quasi tutti gli assiomi proposti coinvolgano il concetto di simmetria assiale, individuando nell'asse di simmetria la piega (e quindi la retta) cercata in termini costruttivi. Poiché non è pensabile introdurre la simmetria assiale in modo assiomatico, si tratterebbe di definirla a partire dalle conoscenze intuitive che già gli studenti probabilmente hanno sviluppato nei cicli scolastici precedenti. Questo aspetto, importante sul piano concettuale, rischia però di deviare troppo dal discorso, per cui si ritiene opportuno, per ora, lasciarlo sullo sfondo ipotizzando di riprenderlo per uno sviluppo successivo.[16]

7.2 Attività previste e commenti alle attività

Si riporta nel dettaglio l'elenco delle attività previste (con i relativi commenti) per sviluppare gli aspetti geometrici e algebrici (come riportato nel par. 6). Le schede da consegnare agli studenti per svolgere le attività sono riportate nell'Allegato 4:[17]
Attività 1G – Origami con GeoGebra.
Attività 2G – Dall'Origami a GeoGebra.
Attività 3G – Oltre gli assiomi di Euclide: trisechiamo l'angolo con GeoGebra.
Attività 4G – Risolviamo le equazioni di terzo grado con GeoGebra.

7.2.1 Origami con GeoGebra

Tutte le attività proposte per GeoGebra si avvarranno solo del software GeoGebra e saranno svolte a coppie per favorire la collaborazione e, nel contempo, evitare la dispersione che un gruppo più numeroso potrebbe comportare in un'attività fatta su computer.

15. In un piano illimitato, le simmetrie assiali (nel caso di rette incidenti) sono due.
16. Una possibile definizione di simmetria assiale a cui si può arrivare con gli studenti formalizzandone la loro idea intuitiva è la seguente:
Data una retta a, una simmetria assiale di asse a è una trasformazione del piano in sé tale che
1. se $A \in a$ il suo trasformato è A stesso;
2. se $A \notin a$ il suo trasformato A' è tale che
   a. $A' \neq A$
   b. $AA' \perp a$
   c. Posto $\{H\} = AA' \cap a$, $[AH]$ è congruente ad $[A'H]$.

17. Questo percorso e le relative attività si sarebbero dovute svolgere nelle classi seconde nel periodo marzo-aprile dell'a.s. 2019/20, cosa che non è stata possibile a causa della chiusura delle scuole per l'emergenza sanitaria dovuta al COVID-19.

Nell'attività 1G (vedi Allegato 4) è richiesto agli studenti di rifare le costruzioni già realizzate con riga e compasso e con il piegamento della carta e, successivamente, le costruzioni postulate negli assiomi AG1-AG7.
Come prerequisiti sono richiesti:
1. la conoscenza degli strumenti di base di GeoGebra;
2. la conoscenza, a livello intuitivo o con una definizione di massima, del concetto di simmetria assiale.

Con quest'attività si vuole mostrare come in GeoGebra siano presenti strumenti che permettano di eseguire, oltre a tutte le costruzioni fattibili con riga e compasso, anche altre costruzioni.
Questa attività è al tempo stesso delicata e cruciale. Magari con qualche difficoltà (e opportunamente guidati) gli studenti dovrebbero riuscire ad effettuare le costruzioni relative agli assiomi AG1-AG6 (tali costruzioni sotto riportate nell'Allegato 5), mentre potrebbero incontrare difficoltà ad effettuare la costruzione relativa all'assioma AG7. In tutti i casi va ricordato (o fatto emergere dagli studenti) che l'oggetto cercato è l'asse di simmetria che individua la simmetria assiale.
Con l'assioma AG7, come detto, usciamo dall'ambiente costruito dalla geometria della riga e del compasso.
Lo scopo principale dell'attività, però, è mostrare cosa sia un modello per un sistema assiomatico, ovviamente nei termini in cui questo può essere proposto a ragazzi dei primi due anni del liceo scientifico. Questo è uno dei punti cruciali del percorso[18] e potrà poi essere ripreso al terzo anno proponendo la geometria analitica come modello della geometria euclidea e quando si parlerà (nel caso) di geometrie non euclidee. Al di là quindi degli aspetti tecnici legati alle costruzioni, sarà importante la successiva discussione relativa alle risposte date dai gruppi alle domande 3, 4 5 e 6 dell'attività 1G (vedi Allegato 4, per comodità riportate di seguito):

3. Ci sono posizioni di rette e punti che non permettono le costruzioni? Riesci a farle tutte in modo preciso o alcune hanno bisogno di metodi non rigorosi? Quali?
4. Come interpreti la condizione sulle distanze nell'assioma AG5? Cosa succederebbe se tale condizione non fosse soddisfatta?
5. Dimostra che le costruzioni precedenti sono proprio quelle richieste. Dalle costruzioni che hai fatto sapresti dire quante possono essere (al massimo) le costruzioni che risolvono il problema?
6. Con le costruzioni precedenti hai visto come quasi tutte le regole del gioco dell'origami (riviste in ambiente GeoGebra) siano ricostruibili con gli strumenti euclidei di GeoGebra. Come interpreti questo "quasi tutte"? Cosa significa, secondo te, che delle regole di un gioco siano ottenibili come *mosse* in un altro gioco?

È probabile che alcuni gruppi non solo non riescano a rispondere, ma non riescano neppure a decodificare la domanda (come nel caso della 3 e della 6). L'analisi stessa della richiesta diventerà allora motivo di riflessione sulla differenza tra esistenza e costruibilità (e possibilità).
Infine, va osservato come non ci sia l'equivalente dell'assioma A0 del sistema OLM e questo perché è sparito il termine primitivo piega. Questa considerazione è da sottolineare proprio per evidenziare come un sistema assiomatico possa e debba essere adattato al contesto, cercando di renderlo completo, ma, allo stesso tempo, non ridondante.

7.2.2 Dall'origami a GeoGebra

L'attività 2G (vedi Allegato 4), svolta sempre a coppie, ha l'ovvio scopo da un lato di riproporre le costruzioni fatte nelle attività 1A e 1B dell'Allegato 2 e dall'altro di mostrare quali possono essere le

18. A loro volta le attività proposte in questa fase potranno essere utilizzate come propedeutiche all'acquisizione di questa consapevolezza.

potenzialità di un software di geometria dinamica non solo come strumento di esplorazione, ma anche nell'ottica di ricerca di condizioni di esistenza. L'aspettativa è che gli studenti scoprano più facilmente quando non ci sono soluzioni e quando sono più di una, consolidando così l'interiorizzazione del senso degli assiomi A7 e AG7.

7.2.3 Oltre gli assiomi di Euclide: trisechiamo l'angolo con GeoGebra

Anche l'attività 3G (vedi Allegato 4) si svolge a coppie. Con questa attività si vuole riproporre con altri strumenti una costruzione già realizzata, in particolare la costruzione che porta alla trisezione dell'angolo fatta con la piegatura della carta nell'attività 3 dell'Allegato 2.
Il passaggio dal foglio di carta al piano di GeoGebra permette non solo di prendere dimestichezza con gli strumenti del software e gli assiomi AG1-AG7, ma anche e soprattutto di vedere quali ne sono i limiti. In particolare gli studenti dovrebbero notare come la costruzione così ottenuta non superi la prova del trascinamento, proprio perché l'assioma AG7 non è modellizzabile all'interno dell'ambiente di lavoro definito dagli assiomi di Euclide (e su cui è strutturato anche il programma GeoGebra).
Per quanto riguarda invece la richiesta di trisecare angoli ottusi o angoli concavi, basta osservare che alla fine della costruzione i primi risultano divisi in 6 angoli congruenti di cui due (consecutivi) rappresentano un terzo dell'angolo di partenza, mentre i secondi risulteranno alla fine divisi in 12 angoli congruenti di cui 4 costituiranno un terzo dell'angolo di partenza. In questo caso ciò che è richiesto agli studenti non è tanto la costruzione della trisezione dell'angolo quanto stabilire quali e quante parti dell'angolo risolvono il problema.

7.2.4 Risolviamo le equazioni di terzo grado con GeoGebra

L'attività 4G dell'Allegato 4 si svolge nel piano cartesiano di GeoGebra e si propone di fornire un metodo per trovare le soluzioni (approssimate) di equazioni di terzo grado, sfruttando una costruzione geometrica che si basa sugli assiomi AG1-AG7. Al di là degli aspetti pratici legati alle costruzioni richieste per l'applicazione dell'assioma AG7, uno dei problemi di fondo riguarda i possibili errori dovuti all'approssimazione nei trascinamenti che si riverberano sulle approssimazioni dei risultati.[19]
L'attività è pensata per la classe seconda (o terza) quando si affronta il problema dell'esistenza e della determinazione delle soluzioni di un'equazione algebrica. La proposta è funzionale a fornire un metodo geometrico per la risoluzione delle equazioni di terzo grado e potrebbe essere preceduta da attività analoghe in cui, conformemente alla modalità euclidea proposta nella Proposizione 28 del Libro VI degli Elementi, si risolvono con metodi geometrici le equazioni di secondo grado.
Le successive domande hanno lo scopo non solo di riportare l'attività tra quelle riconducibili all'assiomatica della geometria dell'origami, ma anche e soprattutto di mostrare come il problema della risolubilità o non risolubilità con riga e compasso sia correlato ai problemi risolvibili con equazioni di secondo o di terzo grado. Chiaramente queste domande non sono tutte di semplice interpretazione oltre che di semplice risposta, per cui si tratta, da parte dell'insegnante, di favorire la riflessione a partire dalle intuizioni o dalle proposte degli studenti. In questo caso, diversamente da quanto fatto con le altre attività, si ritiene opportuno entrare più nel dettaglio delle singole richieste poiché (a parte la richiesta 1 in cui si guida lo studente alla costruzione che permetterà di trovare le soluzioni approssimate) in esse sono coinvolte aspetti delicati relativi sia alle equazioni di terzo grado sia agli strumenti e modalità per trovarne le soluzioni.
Nel seguito sono riportate le richieste presenti nell'attività 4G dell'Allegato 4 e i commenti alle stesse dovrebbero servire per coglierne meglio lo spirito.

19. La dimostrazione relativa all'attività 4G è riportata nell'Allegato 5 insieme alla traccia di risoluzione di alcune attività.

Richiesta 2. Quale, tra i passaggi precedenti, determina la (eventuale) possibilità di una soluzione approssimata? In cosa consiste tale approssimazione (rispondi sia a livello geometrico che algebrico)?

Indicato con P' il punto variabile che permetterà di individuare le soluzioni approssimate e con r la retta che deve colpire il punto obiettivo indicato con B (vedi Figura 15), la soluzione si basa sulla possibilità di spostare P' in modo che la retta t passi per B. La natura discreta del piano di GeoGebra non rende agevole questo spostamento, oltre al fatto che la sovrapposizione è approssimativa.
Come visto per l'assioma AG7, questo è il costo da pagare per poter usare strumenti non riconducibili a riga e compasso. A questo si aggiunge un'ulteriore approssimazione nella soluzione numerica in quanto è vero che i numeri di GeoGebra sono numeri razionali con al massimo 15 cifre decimali (più di quelle presenti su una normale calcolatrice), ma il problema del trascinamento comporta la difficoltà nello spostare il punto P' in modo continuo, rendendo così approssimata la condizione di appartenenza di B alla retta t; per questo, al netto dei problemi legati al trascinamento, le soluzioni sono tutte approssimate significativamente alla seconda/terza cifra decimale.

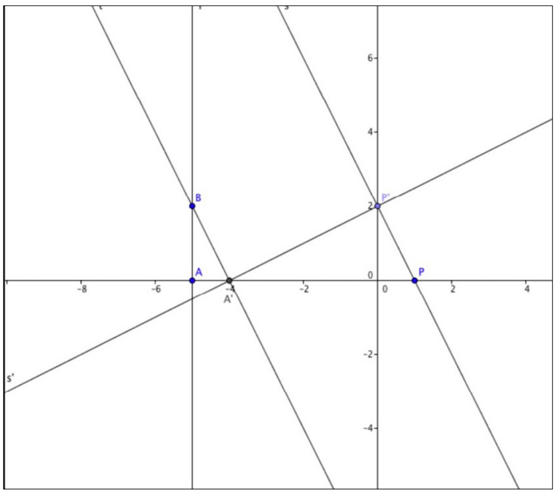


Figura 15. Costruzione per la risoluzione approssimata di equazioni di terzo grado.

Richiesta 3. A partire da particolari equazioni di terzo grado di cui conosci le soluzioni, prova a rifare la costruzione precedente analizzando i casi di una sola soluzione, due soluzioni e tre soluzioni. Riesci a trovare un'equazione di terzo grado per la quale la costruzione proposta non porti a nessuna soluzione?

La richiesta ha lo scopo di indurre lo studente a chiedersi se un'equazione di terzo grado abbia sempre almeno una soluzione; questo apre un ulteriore fronte di indagine sulla motivazione del fatto che un'equazione di terzo grado (come tutte quelle di grado dispari) abbia almeno una soluzione reale. È inoltre importante che gli studenti analizzino equazioni costruite a priori (di cui quindi conoscano già le soluzioni, anche irrazionali) per verificare i vari casi di applicazione del metodo.

Richiesta 4. Sapresti dimostrare perché la costruzione proposta permette di determinare le soluzioni di un'equazione di terzo grado?

È una richiesta difficilmente alla portata di uno studente liceale. Come proposto nell'Allegato 5, l'insegnante potrebbe introdurre la dimostrazione per sommi capi, facendone cogliere i punti critici e lasciarne il completamento agli studenti.

> Richiesta 5. Risolvi l'equazione $x^3+ax^2+bx+c=0$ ponendo $a=0$, $b=0$ e $c=-2$. Che tipo di problema risolve tale equazione?

Può essere interessante vedere come il problema della duplicazione del cubo si leghi per certi aspetti al problema della trisezione dell'angolo e agli strumenti utilizzati per risolverlo. Il valore (approssimato) che si trova con GeoGebra è 1,262725888567698 (vedi **Figura 16**), con un errore minore di 3⁄1000 rispetto al valore corretto.

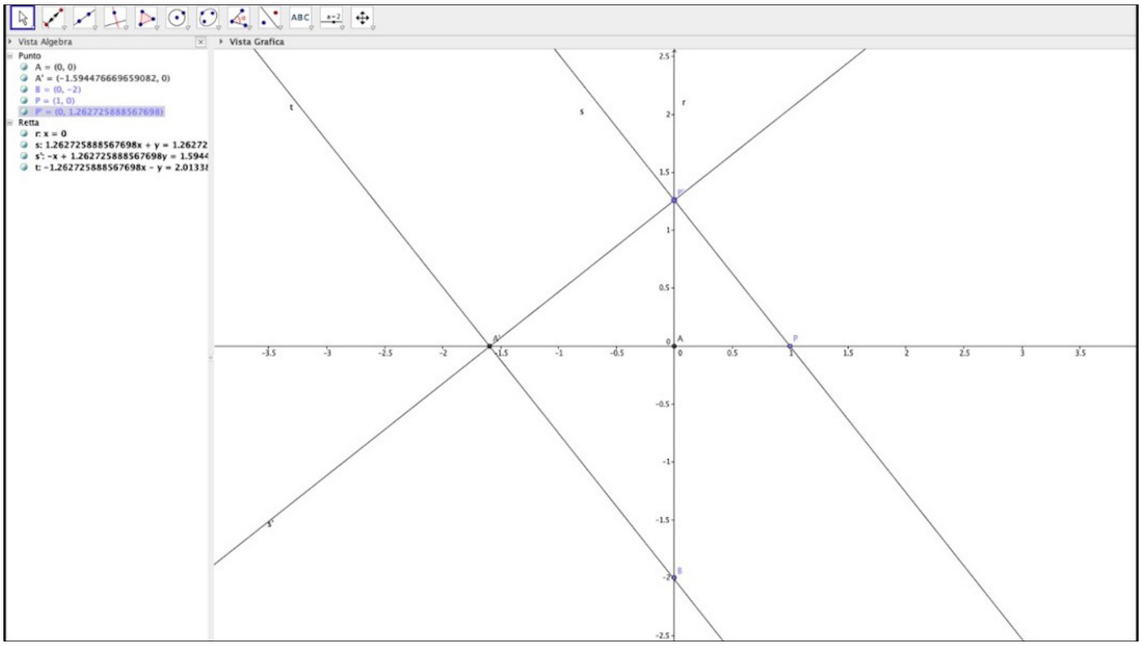


Figura 16. Costruzione per la determinazione approssimata della radice cubica di 2.

8 Una variazione sul tema: sistemi formali, modelli e geometrie finite

La seguente parte (le cui attività sono inserite in dettaglio nell'Allegato 6) può essere proposta come approfondimento degli aspetti precedentemente trattati.
Buona parte dei percorsi relativi al modulo "Geometria dell'origami" si sviluppa, come visto in più circostanze, sul termine *gioco*.[20] Diretta conseguenza di questo approccio è il cruciale rapporto tra i concetti di *termine primitivo* e *assioma*. Far cogliere agli studenti che i termini primitivi sono sostanzialmente termini vuoti (e non, come erroneamente sono spesso presentati, termini di cui tutti noi abbiamo una conoscenza innata a priori)[21] e che gli assiomi costituiscono le definizioni implicite dei

20. Nei giochi è chiara la struttura sintattica del gioco stesso in cui le regole fungono da assiomi così come i vari elementi da termini primitivi; un esempio è dato dal gioco degli scacchi: che un pezzo si chiami "cavallo" non aiuta a giocare, se non si conoscono le "regole" (assiomi) che definiscono implicitamente il pezzo stesso attraverso le relazioni con gli altri pezzi. Parlare di gioco, quindi, significa portare un esempio, facilmente alla portata degli studenti, che sottolinei l'importanza della sintassi come struttura, a prescindere dal contenuto. Giocare quindi significa "seguire le regole" e rimanere coerenti con esse, così come "fare matematica" significa ricavare i risultati (teoremi) permessi dagli assiomi.
21. Dal punto di vista didattico questa idea che i termini primitivi facciano parte della nostra conoscenza innata, costituisce un notevole rischio. Se infatti uno studente (per questioni personali o culturali) non coglie, ad esempio, il concetto di retta, potrebbe pensare che è un problema suo e non un problema epistemologico della disciplina.

termini primitivi non è semplice, ma è un aspetto fondamentale per introdurre e giustificare un approccio ipotetico-deduttivo su aspetti come quelli geometrici (ma non solo) che ai loro occhi risultano spesso garantiti e giustificabili solo sulla base di una presunta evidenza iconica.
A partire da queste considerazioni, un ruolo cardine è svolto dal concetto di modello, il quale permette di passare dal piano sintattico a quello semantico, per cui se si vuole mostrare l'importanza di un modello per un sistema assiomatico, si tratta di far cogliere, oltre a ciò che gli assiomi permettono di fare, anche quali aspetti richiedono strumenti aggiuntivi più potenti. In questo modo gli alunni hanno la possibilità di sperimentare direttamente l'idea di assioma come strumento atto a costruire una realtà matematica di cui loro hanno già avuto una conoscenza (intuitiva) dalla scuola dell'obbligo.
Come ogni insegnante sa, le conoscenze pregresse in ambito geometrico costituiscono spesso veri e propri ostacoli didattici, vista la potenza del linguaggio iconico su cui si regge molta della conoscenza geometrica della scuola primaria[22] e secondaria di primo grado (Sbaragli, 2006, 2007). In questo senso l'impostazione assiomatica rischia di essere percepita dagli studenti come un'inutile complicazione di cui la dimostrazione diventa l'aspetto più eclatante. Procedere con semplici sistemi sintattici e semplici modelli come quelli della geometria finita permette quindi da una parte di far cogliere il senso di modello (anticipando in parte la fondamentale distinzione tra sintassi e semantica, tra coerenza e verità che sottende tutta la matematica liceale), dall'altro di far percepire gli assiomi come necessari nella costruzione e fondazione di un concetto e non come vincoli arbitrari; contestualmente, la speranza è quella di far cogliere come gli oggetti descritti dagli assiomi possono essere anche molto diversi da quelli a cui siamo abituati.
Le attività proposte avranno pertanto lo scopo di avvicinare lo studente alla consapevolezza di un sistema assiomatico e di individuare corrispondenti modelli in modo da passare da un piano sintattico a uno semantico, ponendo così l'accento sulla distinzione tra coerenza e verità.

8.1 Attività proposte e commenti alle attività

Di seguito, si riporta l'elenco delle attività previste (con i relativi commenti) per sviluppare l'aspetto sintattico introdotto nel **par. 6**. Le schede-studente sono riportate nell'Allegato 6.
Attività 1SF – Le flogghe che scorpano
Attività 2SF – Caselle e percorsi.

8.1.1 Le flogghe che scorpano

L'attività 1SF (vedi Allegato 6) si svolge a gruppi. A ciascun componente del gruppo viene fornita la scheda riportata nell'Allegato 6; in essa sono indicate alcune semplici regole sintattiche (equivalenti ad assiomi) per mezzo delle quali si tratta di dedurre delle conclusioni a partire da specifiche premesse. A partire da questo, l'attività, che prende spunto da quanto proposto in Trudeau (1987), si propone di introdurre il concetto di sistema formale e quello di modello, lavorando sul doppio binario sintassi/semantica. L'utilizzo del termine *regola* ha, da questo punto di vista, l'obiettivo di avvicinare gradualmente lo studente all'idea più corretta di assioma, vedendo il cambio di termine strettamente legato al contesto matematico. Per fare questo si procede quindi con l'analisi di un semplice sistema formale per vedere quali risultati si possono dedurre senza basarsi sulla conoscenza o non conoscenza del significato dei termini utilizzati.
La richiesta di sostituire i termini vuoti della teoria con termini noti (di fatto dovrebbero aver compreso che *scorpare* individua una relazione d'ordine totale) introduce all'idea di interpretazione e di modello per una teoria, con l'ulteriore condizione che tale modello (se esiste) non è detto sia unico.

22. La scuola primaria in Italia dura cinque anni e corrisponde alla scuola elementare nel Canton Ticino.

8.1.2 Caselle e percorsi

Anche questa attività si svolge a gruppi e si pone come completamento del percorso volto a far percepire il concetto di teoria assiomatica e di modello di una teoria assiomatica, mirando altresì a far cogliere che l'idea di un oggetto matematico si costruisce con gli assiomi di riferimento che ne specificano di volta in volta le caratteristiche (potendo così essere molto distante dall'idea che ci si è fatti in modo tradizionale di punto e, soprattutto, di retta) e non sulla base di fantomatiche quanto indefinite idee innate.
Entrando nello specifico nell'attività, per gli studenti non sarà facile riuscire ad individuare tutte le rette presenti nel modello di Young[23] costruibili con i vincoli posti dagli assiomi, per cui ci si attende che su questo punto gli studenti possano incontrare difficoltà che li spingano a mettere in dubbio il significato stesso dell'attività; questa potrebbe essere l'occasione per una riflessione sul ruolo e sull'importanza di strutture formali che non si basino su un'intuizione prevalentemente percettiva. Questa ricerca su basi puramente sintattiche ha però l'indubbio vantaggio di costituire una vera e propria ricerca pseudoformale, senza avere cioè nessun aggancio pratico se non l'obbligo della coerenza con le regole.
Il passaggio poi dall'esistenza del modello alla verità come specchio semantico della coerenza sintattica è indubbiamente un passaggio delicato, la cui esplicitazione non sembra opportuna a questo livello, ma che può aprire la strada ad approfondimenti successivi soprattutto nell'ottica di una riflessione sui fondamenti della matematica.
Un ultimo aspetto che può essere discusso in classe è legato alla non unicità di un modello. È auspicabile che nei gruppi emergano modelli diversi e che si arrivi da parte degli studenti alla consapevolezza che, malgrado le differenze formali, rimanga inalterata la caratteristica dell'informazione fornita, aprendo così ad un successivo passaggio (da sviluppare in anni successivi) sul concetto di isomorfismo (in particolare, in questo caso, d'ordine) come condizione per avere modelli equivalenti della stessa teoria.

9 Conclusioni

Come riportato nel par. 5, le attività sviluppate al primo anno hanno sostanzialmente raggiunto gli obiettivi che ci si è prefissati sul piano tecnico; in particolare:
– la percezione dell'importanza di un sistema assiomatico come potente strumento anche sul piano della costruzione degli oggetti geometrici;
– la possibilità di confrontare sistemi assiomatici diversi trovandone equivalenze e/o estensioni;
– la possibilità di vedere in modo ludico un argomento, come la geometria, solitamente poco apprezzato dagli studenti;
– favorire il confronto tra pari e lo sviluppo di competenze argomentative.

Sul piano, invece, della riflessione epistemologica il percorso non ha dato i risultati sperati e per molti aspetti è da ritenersi ancora in fieri, come in effetti è presumibile data l'età degli studenti.
Anche le capacità argomentative dei ragazzi non sono sempre state all'altezza e questo non solo

23. Il modello di Young è un modello per geometrie finite in cui il piano è formato da nove punti e soddisfa i seguenti quattro assiomi (tre assiomi di appartenenza e l'assioma delle parallele):
1. Dati due punti distinti vi è una ed una sola retta cui appartengono entrambi;
2. Per ogni retta r esiste almeno un punto che non appartiene a r;
3. Ogni retta possiede almeno tre punti;
4. Dati una retta r e un punto P che non le appartiene, per P passa una ed una sola retta parallela a r.
Si ricorda che un modello soddisfacente questi assiomi è un piano affine.
Un'applicazione didattica del modello di Young è reperibile in Rossi Dell'Acqua e Speranza (1971).

per la difficoltà intrinseca degli argomenti, ma anche per una scarsa abitudine ad argomentare in matematica. Questo quindi è un aspetto su cui in futuro si ritiene opportuno insistere, confidando, per raggiungere l'obiettivo, anche sul fatto di avere un solo gruppo classe. Tutto questo unito alla convinzione che le criticità evidenziate non siano ostacoli quanto opportunità per motivare in modo significativo il successivo percorso tracciato negli sviluppi dei par. 7 e 8 e che, nel progetto del Liceo Ulivi, costituiranno uno dei focus dei prossimi anni.

Bibliografia

Bartolini Bussi, M. G., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom. Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. Disponibile in: https://www.semanticscholar.org/paper/Semiotic-Mediation-in-the-Mathematics-Classroom%3A-a-Bartolini-Mariotti/4a5fbc94359231edbb29ad9dc96cd84f7d010a61 (consultato il 12.06.2020).

Euclide (1970). *Elementi* (edizione a cura di A. Frajese e L. Maccioni). Torino: UTET.

Hull, T. (2013). *Project origami*. New York: CRC Press.

Huzita, H. (1988). L'equazione di terzo grado si può risolvere con il metodo origami. Carta Bianca.

Lang, R. (2015). Huzita-Justin axioms. Disponibile in: https://langorigami.com/article/huzita-justin-axioms/ (consultato il 12.06.2020).

Maffini, A. (1999). Risoluzione (approssimata) delle equazioni di 3° grado con Cabri-Géomètre II. *Bollettino CABRIRRSAE, 22*, 6-11.

Newton, L. (2009), (traduzione di M. Crespi). La geometria degli origami. *MATEpristem*. Disponibile in: http://matematica.unibocconi.it/articoli/la-geometria-degli-origami (consultato il 12.06.2020).

Rossi Dell'Acqua, A., & Speranza, F. (1971). *Matematica 1*. Bologna: Zanichelli.

Sbaragli, S. (2006). Le misconcezioni in aula. In G. Boselli & M. Seganti (Eds.), *Dal pensare delle scuole: riforme* (pp. 130-139). Roma: Armando Editore. Disponibile in: http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/sbaragli/articolo%20Rimini.pdf (consultato il 12.06.2020).

Sbaragli, S. (2007). Le "proposte" degli insegnanti di scuola primaria concernenti l'infinito matematico. In L. Giacardi, M. Mosca & O. Robutti (A cura di), *Conferenze e seminari 2006-2007 dell'Associazione Subalpina Mathesis* (pp. 73-87). Torino: Kim Williams Books. Disponibile in: http://math.unipa.it/~grim/Quad19_suppl_1_Sbaragli_it_09.pdf (consultato il 12.06.2020).

Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1-36.

Trudeau, R. (1987). *La rivoluzione non euclidea*. Torino: Bollati Boringhieri.