

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. E. Lipin, On a problem related to second-order Diophantine equations, *Izv. IMI UdGU*, 2019, Volume 54, 38–44

DOI: <https://doi.org/10.20537/2226-3594-2019-54-03>

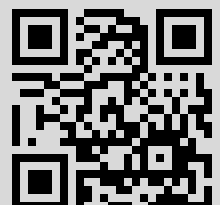
Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 52.87.227.57

November 8, 2021, 17:28:23



УДК 511.176

© А. Е. Лукин

**ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ, ОТНОСЯЩЕЙСЯ К ДИОФАНТОВЫМ УРАВНЕНИЯМ  
ВТОРОГО ПОРЯДКА**

В работе рассматривается сформулированная В. Н. Ушаковым задача о поиске треугольников с целыми длинами сторон  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , удовлетворяющими соотношениям  $a^2 = b^2 + c^2 + k$  и  $\frac{a}{c} = \frac{3}{2}$ , где  $k$  — целое число, отличное от нуля. В работе приводится необходимое и достаточное условие на число  $k$ , при котором такие треугольники существуют. Доказательство имеет конструктивный характер и позволяет, в случае выполнения критерия, указать бесконечное число троек  $(a, b, c)$ , удовлетворяющих указанному свойству.

*Ключевые слова:* системы диофантовых уравнений, рекуррентные соотношения, числа Фибоначчи и Лукаса.

DOI: 10.20537/2226-3594-2019-54-03

**§ 1. Постановка задачи**

В 1998 году В. Н. Ушаков в [1] описал все целые неотрицательные решения системы уравнений

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 + 1, \\ \frac{a}{c} &= \frac{3}{2}. \end{aligned} \tag{1}$$

Такая система уравнений возникает из задачи, сформулированной в 1998 Терри Дж. Невином, в которой ставился вопрос о выделении троек чисел, подобных тройке 915, 628, 610 (при этом упоминался Пифагор в связи с указанной тройкой). Система уравнений (1) была естественно сведена к уравнению Пелля и для ее решения была применена методика выделения решений этого уравнения (см., например, [2, 3]). При этом оказалось, что решения системы (1) связаны с последовательностями Фибоначчи [4], и при выяснении структуры решений системы (1) использовалась, в частности, достаточно активно формула Бине (см., например, [4]). Параллельно с последовательностями Фибоначчи в [1] изучались тесно связанные с ними последовательности Лукаса (см. [5]). Изучение этих последовательностей затем было продолжено в [6], где рассматривался вопрос о представлении чисел Фибоначчи и Лукаса в виде суммы трех квадратов натуральных чисел. Настоящая работа по своей тематике близка к указанным выше исследованиям. В ней одним из основных компонентов при описании исследуемой диофантовой системы уравнений являются последовательности Фибоначчи и Лукаса.

В 1999 году В. Н. Ушаков сформулировал следующую задачу: найти все треугольники с целыми длинами сторон  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , которые удовлетворяют системе

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 + k, \\ \frac{a}{c} &= \frac{3}{2}, \end{aligned} \tag{2}$$

где  $k$  — ненулевое целое число.

Основной целью данной работы является доказательство следующего утверждения.

**Теорема 1.** Пусть  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . Следующие условия эквивалентны:

- (1) существует решение системы (2);
- (2) существует бесконечно много решений системы (2), удовлетворяющих неравенству треугольника;
- (3) существуют целые числа  $\alpha, \beta$ , для которых выполняется:

$$\alpha^2 - \beta^2 + \alpha\beta = k; \quad (3)$$

- (4) для всякого простого числа  $p$ , сравнимого по модулю 5 с 2 или 3,  $p$  входит в факторизацию  $|k|$  в четной степени.

## § 2. Сведение задачи для системы (2) к уравнению $\alpha^2 - \beta^2 + \alpha\beta = k$

Основной целью данного параграфа является доказательство эквивалентности первых трех пунктов теоремы 1.

Покажем, что из первого условия следует третье. Пусть некоторые  $a, b, c \in \mathbb{N}$  удовлетворяют системе (2). Убедимся, что числа  $\alpha = c, \beta = \frac{2b+c}{2}$  удовлетворяют уравнению (3). Во-первых, число  $\beta$  является целым в силу условия  $a = \frac{3}{2}c$ . Во-вторых,

$$\alpha^2 - \beta^2 + \alpha\beta = \frac{5}{4}c^2 - b^2 = \frac{9}{4}c^2 - b^2 - c^2 = a^2 - b^2 - c^2 = k.$$

Осталось доказать, что из третьего условия следует второе. Пусть некоторые  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$  удовлетворяют уравнению (3).

**Утверждение 1.**  $\exists \bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \mathbb{N}: |\bar{\alpha}^2 - \bar{\beta}^2 + \bar{\alpha}\bar{\beta}| = |k|$ .

**Доказательство.** Если хотя бы одно из чисел  $\alpha, \beta$  равно нулю, возьмем  $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$  равными модулю другого. Иначе, если  $\alpha$  и  $\beta$  имеют один знак, можно взять  $\bar{\alpha} = |\alpha|, \bar{\beta} = |\beta|$ . Если же  $\alpha$  и  $\beta$  имеют разные знаки, положим  $\bar{\alpha} = |\beta|, \bar{\beta} = |\alpha|$ .  $\square$

Введем обозначение:

$$\bar{k} = \bar{\alpha}^2 - \bar{\beta}^2 + \bar{\alpha}\bar{\beta}. \quad (4)$$

Обозначим  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  последовательности Фибоначчи и Лукаса, то есть последовательности, определяемые соотношениями  $\varphi_1 = 1, \varphi_2 = 1, \varphi_n = \varphi_{n-1} + \varphi_{n-2}$  и  $\psi_1 = 1, \psi_2 = 3, \psi_n = \psi_{n-1} + \psi_{n-2}$  соответственно.

Определим последовательности  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  и  $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \mu_n &= \bar{\alpha}\varphi_n + \bar{\beta}\varphi_{n+1}, \\ \nu_n &= \bar{\alpha}\psi_n + \bar{\beta}\psi_{n+1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Легко видеть, что величины  $\mu_n$  и  $\nu_n$  положительны.

Заметим, что  $\mu_n = \mu_{n-1} + \mu_{n-2}, \nu_n = \nu_{n-1} + \nu_{n-2}$ .

Обозначим  $\rho_n = \nu_n^2 - 5\mu_n^2$ .

**Утверждение 2.**  $\rho_n = (-1)^n 4\bar{k}$ .

**Доказательство.** Обозначим  $\sigma_n = \nu_n \nu_{n+1} - 5\mu_n \mu_{n+1}$ . Заявленное утверждение докажем индукцией по  $n$  одновременно с формулой  $\sigma_n = (-1)^n 2\bar{k}$ .

База индукции.

Заявленные формулы для  $\rho_1, \rho_2, \sigma_1$  нетрудно проверить, выразив эти величины через  $\bar{\alpha}$  и  $\bar{\beta}$ , а затем воспользовавшись равенством (4).

Проверим шаг индукции.

$$\begin{aligned}\rho_n &= \nu_n^2 - 5\mu_n^2 = (\nu_{n-1} + \nu_{n-2})^2 - 5(\mu_{n-1} + \mu_{n-2})^2 = \rho_{n-1} + 2\sigma_{n-2} + \rho_{n-2} = (-1)^n 4k; \\ \sigma_n &= \nu_n \nu_{n+1} - 5\mu_n \mu_{n+1} = \nu_n(\nu_n + \nu_{n-1}) - 5\mu_n(\mu_n + \mu_{n-1}) = \rho_n + \sigma_{n-1} = (-1)^n 2k. \quad \square\end{aligned}$$

**Утверждение 3.** Существует бесконечно много натуральных значений  $n$  каждой четности, при которых обе величины  $\mu_n$  и  $\nu_n$  — четные.

**Доказательство.** Заметим, что четности  $\varphi_n$  и  $\psi_n$  совпадают. Значит, совпадают и четности  $\mu_n$  и  $\nu_n$ . Тогда достаточно исследовать только четность  $\mu_n$ . Обозначим через  $[\varphi_n]_2$  остаток от деления  $\varphi_n$  на 2. Легко видеть, что  $[\varphi_n]_2 = 0$  тогда и только тогда, когда  $n$  делится на 3. В зависимости от четности  $\alpha$  и  $\beta$  возможны четыре случая.

- (1)  $\alpha$  и  $\beta$  оба четные. Тогда  $\mu_n$  четное при всех  $n$ .
- (2)  $\alpha$  нечетное,  $\beta$  четное. Тогда  $\mu_n$  четное при  $n \equiv 0 \pmod{3}$ .
- (3)  $\alpha$  и  $\beta$  оба нечетные. Тогда  $\mu_n$  четное при всех  $n \equiv 1 \pmod{3}$ .
- (4)  $\alpha$  четное,  $\beta$  нечетное. Тогда  $\mu_n$  четное при  $n \equiv 2 \pmod{3}$ .

□

Возьмем произвольное  $n \in \mathbb{N}$ , при котором  $\mu_n$  и  $\nu_n$  — четные числа.

Положим  $a = \frac{3}{2}\mu_n$ ,  $b = \frac{1}{2}\nu_n$ ,  $c = \mu_n$ . Сразу заметим, что  $a = \frac{3}{2}c$ , и что все три числа натуральны. Нетрудно видеть, что  $a^2 - b^2 - c^2 = -\frac{1}{4}\rho_n = -(-1)^n \bar{k}$ . Так как  $|\bar{k}| = |k|$ , то при выборе нужной четности  $n$  получаем выполнение системы (2), при этом разным  $n$  будут соответствовать разные решения. Осталось убедиться, что числа  $a, b, c$  удовлетворяют неравенству треугольника.

Неравенство  $a + b > c$  следует уже из того, что  $a > c$ .

Неравенство  $b + c > a$  сводится к  $\nu_n > \mu_n$ , что легко вывести из определения последних.

Наконец, неравенство  $c + a > b$  сводится к  $5\mu_n > \nu_n$ , что, в свою очередь, следует из  $5\varphi_n > \psi_n$ , а последнее легко доказать индукцией по  $n$ .

### § 3. Решение уравнения $\alpha^2 - \beta^2 + \alpha\beta = k$

Основной целью данного параграфа является доказательство следующего утверждения.

**Теорема 2.** Пусть  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1)  $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{Z}: \alpha^2 - \beta^2 + \alpha\beta = k$ ;
- (2) для всякого простого числа  $p$ , сравнимого по модулю 5 с 2 или 3,  $p$  входит в факторизацию  $|k|$  в четной степени.

Обозначим через  $A$  множество значений  $k$ , при которых выполняется первое условие, и через  $B$  — второе. Таким образом, наша цель состоит в доказательстве утверждения  $A = B$ .

Сначала научимся при всех простых  $p$  решать над полем  $\mathbb{Z}_p$  следующее уравнение:

$$x^2 - y^2 + xy = 0. \quad (6)$$

Для всяких  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $b \in \mathbb{N}$  обозначим  $[a]_b$  остаток от деления  $a$  на  $b$ . Обозначим  $b|a$  отношение « $b$  делит  $a$ ». Для всякой арифметической операции  $\circ$  будем обозначать  $\circ_b$  аналогичную операцию в поле  $\mathbb{Z}_p$ .

**Утверждение 4.** Пусть  $p$  — простое число. Тогда:

- (1) если  $[p]_5 \in \{2, 3\}$ , то уравнение (6) имеет единственное решение  $(x = 0, y = 0)$ ;
- (2) если  $[p]_5 \in \{0, 1, 4\}$ , то  $\exists \xi \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\} \forall a \in \mathbb{Z}_p: (x = a, y = [\xi a]_p)$  — решение уравнения (6).

**Доказательство.** При  $p = 2$  заявленное утверждение нетрудно проверить непосредственно. Далее будем полагать, что  $p > 2$ .

Сразу заметим, что при  $x = 0, y \neq 0$  равенство (6) выполняться не может. Поделив обе части уравнения (6) на  $x^2$ , получим квадратное уравнение относительно  $y/{}_p x$  в поле  $\mathbb{Z}_p$ :

$$(y/{}_p x)^2 - y/{}_p x - 1 \equiv 0 \pmod{p}. \quad (7)$$

Нетрудно видеть, что дискриминант этого уравнения равен 5. Соответственно, уравнение (7) имеет корень тогда и только тогда, когда 5 является квадратичным вычетом в поле  $\mathbb{Z}_p$ . По квадратичному закону взаимности [7, 8] последнее эквивалентно тому, что  $p$  является квадратичным вычетом в поле  $\mathbb{Z}_5$ , а это выполняется тогда и только тогда, когда  $[p]_5 \in \{0, 1, 4\}$ , и отсюда немедленно получаем заявленное утверждение.  $\square$

**Утверждение 5.** Пусть  $k \in A$  и существует простое число  $p$  такое, что  $[p]_5 \in \{2, 3\}$  и  $p|k$ . Тогда  $p^2|k$ , причём  $\frac{k}{p^2} \in A$ .

**Доказательство.** Как мы помним,  $k \in A$  означает, что для некоторых целых  $\alpha, \beta$  выполняется  $k = \alpha^2 - \beta^2 + \alpha\beta$ , откуда  $\alpha^2 - \beta^2 + \alpha\beta \equiv 0 \pmod{p}$ . Из утверждения 4 следует  $p|\alpha$  и  $p|\beta$ . Тогда  $k = p^2((\frac{\alpha}{p})^2 - (\frac{\beta}{p})^2 + \frac{\alpha}{p}\frac{\beta}{p})$ , и отсюда получаем заявленное утверждение.  $\square$

**Утверждение 6.**  $A \subseteq B$ .

**Доказательство.** От противного: пусть множество  $A \setminus B$  непусто. Возьмем в нем минимальный по модулю элемент  $k$ .

По определению  $k \notin B$  число  $k$  имеет простой делитель  $p$ , для которого  $[p]_5 \in \{2, 3\}$ . Тогда по утверждению 5 выполняется  $p^2|k$  и  $\frac{k}{p^2} \in A$ . Нетрудно видеть, что  $\frac{k}{p^2} \notin B$  и  $|\frac{k}{p^2}| < |k|$  — противоречие с минимальностью  $|k|$ .  $\square$

Перейдем к доказательству обратного включения.

**Утверждение 7.** Если  $m, n \in A$ , то  $mn \in A$ .

**Доказательство.** Пусть  $m = p^2 - q^2 + pq, n = r^2 - s^2 + rs$ . Нетрудно убедиться, что при  $\alpha = pr - qs + qr, \beta = ps - qr$  получаем  $mn = \alpha^2 - \beta^2 + \alpha\beta$ .  $\square$

Заметим, к слову, что  $-1 \in A$  — подойдет набор  $(\alpha = 1, \beta = -1)$ .

**Утверждение 8.** Пусть  $p$  простое число и  $[p]_5 \in \{0, 1, 4\}$ . Тогда  $p \in A$ .

**Доказательство.** Согласно утверждению 4, существует  $\xi \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$  такое, что при любом  $a \in \mathbb{Z}_p$  набор  $(x = a, y = [\xi a]_p)$  является решением уравнения (6). Обозначим  $b(a) = [\xi a]_p$ . Обозначим  $s = \lceil \sqrt{p} \rceil$ . Так как  $p$  простое, то  $s^2 > p$ . Обозначим  $B = \{b(a) : a \in \mathbb{Z}_p, a < s\}$ .

Заметим, что при  $a_1 \neq a_2$  выполняется  $b(a_1) \neq b(a_2)$ , так как  $[b(a_1) - b(a_2)]_p = [\xi(a_1 - a_2)]_p$ , где правая часть не делится на  $p$ . Тогда  $|B| = s$ . Упорядочим  $B$  по возрастанию:  $B = \{b_1, \dots, b_s\}, b_1 < \dots < b_s$ .

При всех  $i$  от 1 до  $s - 1$  положим  $d_i = b_{i+1} - b_i$ . Кроме того, положим  $d_s = b_1 - b_s + p$ . Очевидно,  $d_1 + \dots + d_s = p$  и все  $d_i$  положительны. Так как  $p < s^2$ , то найдется такое  $i$ , что  $d_i < s$ .

Таким образом, для некоторых  $0 \leq a_1 < a_2 < s$  выполняется  $0 < [b(a_2) - b(a_1)]_p < s$ . Заметим, что  $[b(a_2) - b(a_1)]_p = [\xi a_2 - \xi a_1]_p = [\xi(a_2 - a_1)]_p = b(a_2 - a_1)$ . Положим  $a_0 = a_2 - a_1$ . Как мы показали, выполняется одновременно  $0 < a_0 < s$  и  $0 < b(a_0) < s$ .

Рассмотрим подстановку ( $x = a_0, y = b(a_0)$ ). Так как по определению функции  $b$  такой набор  $(x, y)$  является решением уравнения (6), то в  $\mathbb{Z}$  имеем  $x^2 - y^2 + xy = pn$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

Заметим, что при  $p > 40$  выполняется  $3s^2 < 4p$ . Тогда при  $p > 40$  выполняется

$$|pn| = |x^2 - y^2 + xy| < 3s^2 < 4p,$$

то есть  $|n| < 4$ . Так как при  $|n| \in \{2, 3\}$  выполнялось бы  $pn \in A \setminus B$ , что противоречило бы утверждению (6), то  $|n| \leq 1$ . Наконец,  $n \neq 0$ , так как уравнение  $x^2 - y^2 + xy = 0$  не имеет ненулевых решений в целых числах. Значит,  $|n| = 1$ .

Значит, хотя бы одно из чисел  $p, -p$  принадлежит множеству  $A$ . Так как  $-1 \in A$ , то по утверждению 7 выполняется  $p \in A$ .

Осталось рассмотреть случай, когда  $p \leq 40$ . Для всех вошедших в этот промежуток удовлетворяющих посылке заявленного утверждения значений  $p$  пары  $(\alpha, \beta)$  укажем явно.

11: (3, 2), 19: (4, 3), 29: (5, 4), 31: (5, 3). □

Теперь заметим, что  $\forall n \in \mathbb{N}$  при  $k = n^2$  решением уравнения (3) является пара  $(\alpha = n, \beta = n)$ , откуда  $A$  содержит все полные квадраты. Вкупе с утверждениями (7) и (8), а также замеченным нами фактом  $-1 \in A$ , это означает включение  $B \subseteq A$  — таким образом, теорема 2 доказана, а значит, доказана и теорема 1.

Все вышесказанное дает следующий алгоритм генерации троек, удовлетворяющих системе (1).

#### Алгоритм генерации

1. Представить число  $k$  в виде  $n^2 p_1 \cdots p_m$ , где  $p_1, \dots, p_m$  — различные простые числа.
2. Если хотя бы одно из  $p_i$  сравнимо с 2 или 3 по модулю 5, то искомым троек не существует.
3. Иначе для каждого из  $p_i$  найдем числа  $\alpha_i, \beta_i$ , для которых  $\alpha_i^2 + \alpha_i \beta_i - \beta_i^2 = |p_i|$  — согласно утверждению 8, хотя бы в одной из таких пар числа  $\alpha_i, \beta_i$  не превосходят корня из  $p_i$ .
4. По формуле из утверждения 7, найдем числа  $\alpha$  и  $\beta$ , для которых  $\alpha^2 + \alpha\beta - \beta^2 = k$ .
5. Каким образом, имея числа  $\alpha$  и  $\beta$ , найти бесконечное число троек  $(a, b, c)$ , указано в первом параграфе.

Автор благодарит Н. В. Маслову из Института математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН за существенный вклад в работу. Тематика работы примыкает к [7, 8].

**Финансирование.** Работа выполнена при поддержке гранта Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проект №18–01–00221).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ушаков В.Н. Египетские треугольники и числа Фибоначчи // Империя математики. 2001. № 11. С. 21–50.
2. Гельфонд А.О. Решение уравнений в целых числах. М.: Гостехиздат, 1957.
3. Хинчин А.Я. Цепные дроби. М.: ГИФМЛ, 1960.
4. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи. М.: Наука, 1978.

5. Кокстер Г.С.М. Введение в геометрию. М.: Наука, 1966.
6. Латушкин Я.А., Ушаков В.Н. О представлении чисел Фибоначчи и Люка в виде суммы трех квадратов // Математические заметки. 2012. Т. 91. Вып. 5. С. 711–719.  
<https://doi.org/10.4213/mzm9359>
7. Гаусс К.Ф. Труды по теории чисел. М.: Изд-во АН СССР, 1959.
8. Дэвенпорт Г. Высшая арифметика. Введение в теорию чисел. М.: Наука, 1965.

Поступила в редакцию 26.09.2019

Липин Антон Евгеньевич, младший научный сотрудник, Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.  
E-mail: [tony.lipin@yandex.ru](mailto:tony.lipin@yandex.ru)

**Цитирование:** А.Е. Липин. Об одной задаче, относящейся к диофантовым уравнениям второго порядка // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2019. Т. 54. С. 38–44.

**A. E. Lipin**

**On a problem related to second-order Diophantine equations**

*Keywords:* systems of diophantine equations, recurrence relations, Fibonacci and Lucas numbers.

MSC2010: 11B39

DOI: 10.20537/2226-3594-2019-54-03

The article considers the problem set by V.N. Ushakov of finding triangles with integer lengths of sides  $a, b, c$ , satisfying the relations  $a^2 = b^2 + c^2 + k$  and  $\frac{a}{c} = \frac{3}{2}$ , where  $k$  is a nonzero integer. We give a necessary and sufficient condition for the number  $k$  under which such triangles exist. The proof is constructive and allows, in the case of satisfying the criterion, to indicate an infinite number of triples  $(a, b, c)$  with the given property.

**Funding.** The studies was funded by RFBR, project number 18–01–00221.

REFERENCES

1. Ushakov V.N. Egyptian triangles and Fibonacci numbers, *Imperiya Matematiki*, 2001, no. 11, pp. 21–50 (in Russian).
2. Gel'fond A.O. *Reshenie uravnenii v tselykh chislakh* (Solving equations in integers), Moscow: Gostekhizdat, 1957.
3. Hinchin A.Ya. *Tsepnye drobi* (Continued fraction), Moscow: GIFML, 1960.
4. Vorob'ev N.N. *Chisla Fibonachchi* (Fibonacci numbers), Moscow: Nauka, 1978.
5. Coxeter H.S.M. *Introduction to geometry*. New York–London: John Wiley & Sons, 1961. Translated under the title *Vvedenie v geometriyu*, Moscow: Nauka, 1966.
6. Latushkin Ya.A., Ushakov V.N. On the representation of Fibonacci and Lucas numbers as the sum of three squares, *Mathematical Notes*, 2012, vol. 91, issue 5–6, pp. 663–670. <https://doi.org/10.1134/S0001434612050070>
7. Gauss K.F. *Trudy po teorii chisel* (Works on number theory), Moscow: Academy of Sciences of USSR, 1959.
8. Davenport H. *The higher arithmetic: An introduction to the theory of numbers*, London: Hutchinson's University Library, 1952. Translated under the title *Vysshaya arifmetika. Vvedenie v teoriyu chisel*, Moscow: Nauka, 1965.

Received 26.09.2019

Lipin Anton Evgen'evich, Junior Researcher, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia.  
E-mail: tony.lipin@yandex.ru

**Citation:** A. E. Lipin. On a problem related to second-order Diophantine equations, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2019, vol. 54, pp. 38–44.