



DOI: <https://doi.org/10.15688/jvolsu1.2017.2.5>

УДК 532.516:532.546

ББК 22.253.3

ПРОНИЦАЕМОСТЬ ДВУМЕРНОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ ИЗ ВОЛОКОН КВАДРАТНОГО СЕЧЕНИЯ (ЯЧЕЕЧНАЯ МОДЕЛЬ)

Екатерина Владимировна Мосина

Кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры фундаментальной информатики и оптимального управления, Волгоградский государственный университет
katefrkate@mail.ru, fiou@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Игорь Викторович Чернышев

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры фундаментальной информатики и оптимального управления, Волгоградский государственный университет
igor_chernyshev@mail.ru, fiou@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. В рамках ячеечной модели численно решена задача о поперечном обтекании системы волокон (стержней) квадратного сечения. Решение для отдельной ячейки получено в приближении малых чисел Рейнольдса с краевыми условиями Хаппеля (равенство нулю нормальной составляющей скорости и касательного напряжения) на границе ячейки. Вычислена гидродинамическая проницаемость такой модельной волокнистой пористой среды. Проведено сопоставление с результатами других авторов для систем стержней квадратного и круглого сечения в широком диапазоне изменения концентрации включений. Предложены аналитические зависимости, наиболее адекватно описывающие проницаемость системы квадратных волокон.

Ключевые слова: модельная пористая среда, волокна квадратного сечения, приближение Стокса, ячеечная модель Хаппеля, проницаемость.

Введение

При математическом моделировании фильтрационных задач движения жидкости сквозь пористые среды зачастую используют уравнение для усредненной (фильтрационной) скорости, полученное на основе эмпирического закона Дарси. Более точный

микроскопический анализ течения сквозь пористую среду — задача сложная и требует дополнительных упрощений: линеаризации гидродинамических уравнений, предположения об одинаковости размеров частиц, пренебрежения броуновским движением и др. [3; 7]. Важным макроскопическим параметром, определяющим характер течения и результирующее гидравлическое сопротивление, является коэффициент проницаемости, зависящий от пористости среды, структуры порового пространства, физико-химических свойств материала среды.

В настоящей работе решена задача о течении вязкой несжимаемой жидкости сквозь пористую среду, моделируемую совокупностью одинаковых стержней квадратного поперечного сечения. Такая задача может быть сведена к задаче обтекания одиночного стержня в рамках ячеечной модели [7], то есть решается краевая задача о течении в жидкой оболочке, окружающей одиночный стержень. При этом пористость для отдельной ячейки совпадает со средней пористостью всей моделируемой проницаемой среды.

Этот метод может быть эффективно применен к сравнительно концентрированным системам (с объемной долей твердых включений $\phi \simeq 0,5 \div 0,6$). Ячеечные модели дают удовлетворительное приближение к усредненной картине течения вблизи твердых частиц в реальной физической системе, но, тем не менее, нельзя рассчитывать на то, что они хорошо описывают гидродинамические поля вблизи воображаемых границ ячеек. Вопрос о выборе формы и размеров жидкой ячейки, а также условий на ее границе, остается открытым и до сих пор привлекает исследователей (например, [15]).

Проведено сопоставление результатов, полученных в данной работе, с аналитическими [9; 11], полуаналитическими [10; 13; 14], расчетными [8; 12] и экспериментальными [13] данными других авторов, определены наиболее оптимальные аналитические зависимости для коэффициента проницаемости системы квадратных стержней в различных диапазонах объемной концентрации частиц.

1. Поперечное обтекание квадратного стержня (ячеечная модель)

Рассматривается стационарное двумерное однородное течение несжимаемой ньютоновской вязкой жидкости со средней скоростью U через ячейку квадратного сечения размера $2bH$ с расположенным в ее центре квадратным включением (стержнем) размера $2aH$ (см. рис. 1). Свяжем с жидкой ячейкой декартову систему координат: ось Ox в направлении скорости U , ось Oy перпендикулярно ей, ось Oz поперек потоку и вдоль образующих стержня. После обезразмеривания пространственных переменных x и y на H , компонент скорости u , v на U и давления p на $\mu U/H$ (где μ — коэффициент динамической вязкости жидкости) система уравнений движения в приближении Стокса примет вид

$$\Delta \mathbf{v} = \nabla p, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (1)$$

На поверхности включения задаются граничные условия прилипания $\mathbf{v} = 0$; на границах жидкой ячейки — условия Хаппеля: непроницаемости (равенства нулю нормальной компоненты скорости $v_n = 0$) и равенства нулю касательного напряжения $\tau = 0$.

Исключая из системы (1) давление p и учитывая двумерность постановки, задача сводится к бигармоническому уравнению на функцию тока

$$\Delta \Delta \psi = 0. \quad (2)$$

Линейность уравнения движения, а также симметрия постановки задачи позволяют ограничить рассмотрение четвертью ячейки $(x, y) \in [0, b] \times [0, b]$ (см. рис. 2). Краевые

условия для функции тока на границах расчетной области будут следующими. Условия прилипания на твердой поверхности включения:

$$\psi(c, y) = 0, \quad \psi_x(c, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq a \quad (c = b - a) \quad (3)$$

$$\psi(x, a) = 0, \quad \psi_y(x, a) = 0, \quad c \leq x \leq b. \quad (4)$$

Симметрия относительно $y = 0$ и $x = b$ приводит к условиям:

$$\psi(x, 0) = 0, \quad \psi_{yy}(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq c, \quad (5)$$

$$\psi_x(b, y) = 0, \quad \psi_{xxx}(b, y) = 0, \quad a \leq y \leq b. \quad (6)$$

Граничные условия на поверхности жидкой ячейки:

$$\psi(0, y) = y/b, \quad \psi_{xx}(0, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq b, \quad (7)$$

$$\psi(x, b) = 1, \quad \psi_{yy}(x, b) = 0, \quad 0 \leq x \leq b. \quad (8)$$

Для наглядности условия (3)–(8) вынесены на рисунок 2.

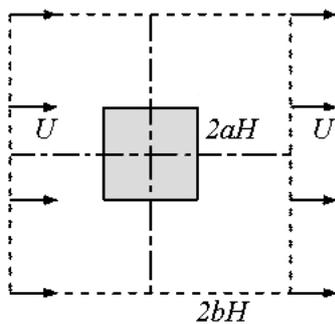


Рис. 1. Жидкая ячейка с твердым включением

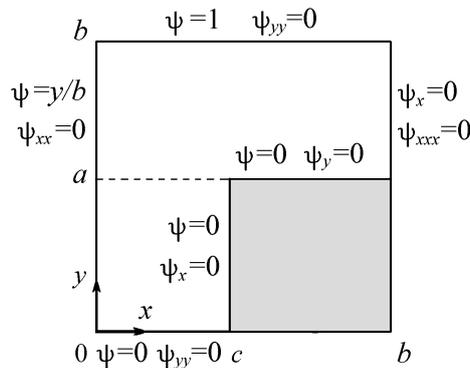


Рис. 2. Расчетная область

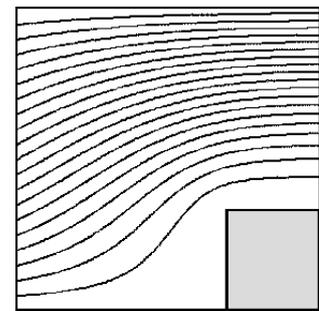


Рис. 3. Линии тока при $\phi = 0, 1$

2. Функция тока и сила сопротивления

Краевая задача для функции тока решена численно с помощью симметричной конечно-разностной аппроксимации бигармонического уравнения (2) и граничных условий (3)–(8) второго порядка точности [1]. Для достижения абсолютной ошибки 10^{-3} гидродинамических полей разбиение расчетной области обычно проводилось на 300 отрезков по каждому направлению. Система разностных уравнений решена методом последовательной верхней релаксации с параметром релаксации $1,5 < \omega < 2,0$. Расчеты представлены для широкого диапазона концентрации твердых включений $\phi = a^2/b^2 = 0,001 \div 0,8$. Характерная картина линий тока изображена на рисунке 3.

По функции тока находим распределение давления в рассматриваемой области. Поскольку $p_x = (\Delta\psi)_y$, $p_y = -(\Delta\psi)_x$, то, полагая $p(0, y) = 0$, получаем

$$p(x, y) = \psi_{xy}(x, y) + \int_0^x \psi_{yyy}(\xi, y) d\xi.$$

Сила сопротивления (обезразмеренная на $\mu U H$) для четверти стержня равна сумме, проинтегрированных по соответствующим площадкам, нормального напряжения на

левой границе ($x = c, 0 \leq y \leq a$) и касательного напряжения на верхней границе ($y = a, c \leq x \leq b$)

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}F_x &= - \int_0^a [-p(c, y) + 2\psi_{xy}(c, y)] dy + \int_c^b [\psi_{yy}(x, a) - \psi_{xx}(x, a)] dx = \\ &= - \int_0^a \left[\psi_{xy}(c, y) - \int_0^c \psi_{yyy}(x, y) dx \right] dy + \int_c^b [\psi_{yy}(x, a) - \psi_{xx}(x, a)] dx. \end{aligned}$$

Из условий прилипания на твердых границах (3), (4) следует $\psi_{xy}(c, y) = 0$ при $0 \leq y \leq a$, $\psi_{xx}(x, a) = 0$ при $c \leq x \leq b$, а из условия симметрии (5) $\psi_{yy}(x, 0) = 0$ при $0 \leq x \leq c$, тогда выражение для силы сопротивления будет следующим

$$F_x = 4 \int_0^b \psi_{yy}(x, a) dx. \quad (9)$$

То есть расчет силы сопротивления твердого включения сводится к интегрированию касательного напряжения на уровне $y = a$.

3. Проницаемость системы квадратных стержней

В рамках ячеечной модели сила сопротивления, отнесенная к площади жидкой ячейки, численно равна падению давления на длине L , обусловленному протеканием жидкости сквозь систему включений

$$\frac{F_x}{b^2} = \frac{\Delta p}{L}.$$

Полагая объемную долю ϕ твердого включения в жидкой ячейке равной объемной доли твердой фазы во всей совокупности включений и объединяя полученное выражение для силы сопротивления с законом Дарси, получим выражение для коэффициента проницаемости системы стержней (обезразмерен на H^2)

$$\frac{k}{a^2} = \frac{1}{F_x \phi}. \quad (10)$$

На рисунке 4 изображена зависимость проницаемости квадратных стержней k_s/a^2 , полученной численно по формуле (10) в рамках ячеечной модели «квадрат в квадрате», от проницаемости круговых стержней k_c/R^2 (R — радиус поперечного сечения круговых стержней), задаваемой аналитически [7], в рамках ячеечной модели «круг в круге». Сопоставление проведено в широком диапазоне концентрации ϕ и замечено, что при $0,1 \leq \phi \leq 0,6$ эта зависимость линейная [2]

$$\frac{k_s}{a^2} = \frac{1}{\sigma^2} \frac{k_c}{R^2} = \frac{1}{\sigma^2} \frac{1}{8\phi} \left(\ln \frac{1}{\phi} - \frac{1 - \phi^2}{1 + \phi^2} \right), \quad (11)$$

где коэффициент пропорциональности $\sigma^2 \approx \pi/4$ получен методом наименьших квадратов и равен отношению площадей кругового и квадратного сечения одинакового размера.

В работах [4–6] проведено прямое численное моделирование течения вязкой несжимаемой жидкости в плоском канале, частично заполненном регулярной решеткой квадратных стержней. В качестве вспомогательного результата рассчитаны значения проницаемости такой системы стержней путем усреднения микроскопических гидродинамических полей. В ходе сравнения полученных данных для квадратных стержней с имеющимися в литературе данными для круговых стержней обнаружено, что для разреженной системы введением коэффициента формы σ^2 можно использовать аналитическую зависимость

$$\frac{k}{a^2} = \frac{1}{\sigma^2} \frac{1}{8\phi} \left(\ln \frac{1}{\phi} - 1,476 + 2\phi \right), \quad \phi \leq 0,2, \quad (12)$$

полученную методом сингулярностей для круговых цилиндров [11]. Справедливость этой формулы для круговых цилиндров подтверждается рядом исследований и для более плотных упаковок ($\phi \leq 0,6$) [10; 12; 13].

Отметим, что для разреженной системы волокон тип их упаковки (квадратная, треугольная или гексагональная) практически не влияет на проницаемость [11; 13; 14]. В случае стесненного расположения твердых включений влияние упаковки уже более существенно, что связано с различием извилистости поровых каналов.

Для умеренно разреженных решеток волокон хорошей аппроксимацией является полуэмпирическая формула Кармана — Козени $k = (1-\phi)R_h^2/c_k$, где $R_h = (b^2 - a^2)/2a$ — гидравлический радиус жидкой ячейки, с коэффициентом Козени c_k , рассчитанным на основе ячеечной модели Хаппеля двух концентрических круговых цилиндров [7]. Некоторые исследователи [8; 13] отмечают, что ячеечная модель дает завышенные значения проницаемости по сравнению с их данными. Для стержней квадратного сечения наблюдается такая же картина. Использование корректирующего множителя $1/\sigma^2$ [5] вносит ошибку более 25% в вычисление проницаемости. С целью уменьшения этой ошибки следует использовать меньший коэффициент $8/9$ [6]

$$\frac{k}{a^2} = \frac{1}{9\phi} \left(\ln \frac{1}{\phi} - \frac{1-\phi^2}{1+\phi^2} \right), \quad 0,1 < \phi < 0,6. \quad (13)$$

Для больших значений объемной концентрации коэффициент Козени c_k следует брать равным 6 из интервала $4,5 \leq c_k \leq 6$, соответствующего экспериментальным данным для реальных пористых сред [7]. Выражение для проницаемости тогда примет вид

$$\frac{k}{a^2} = \frac{(1-\phi)^3}{24\phi^2}, \quad 0,6 \leq \phi < 0,8. \quad (14)$$

На рисунке 5 представлены значения коэффициента проницаемости k/a^2 , полученные в результате прямого численного моделирования. Данные практически совпадают с данными Ванга [14] для проницаемости бесконечной упорядоченной совокупности квадратных стержней, полученной с использованием полуаналитического метода коллокации для функции тока.

Таким образом, формулы (12)–(14) дают хорошее приближение для коэффициента проницаемости системы квадратных стержней, в то время как ячеечная модель с условиями Хаппеля на границе жидкой ячейки дает завышенные значения проницаемости по сравнению с прямыми численными расчетами.

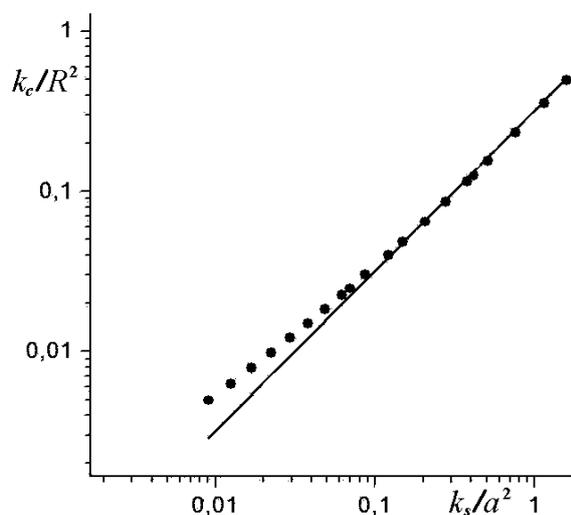


Рис. 4. Проницаемости системы квадратных стержней, вычисленные по ячеечной модели (•), и линейная зависимость (11) (сплошная линия)

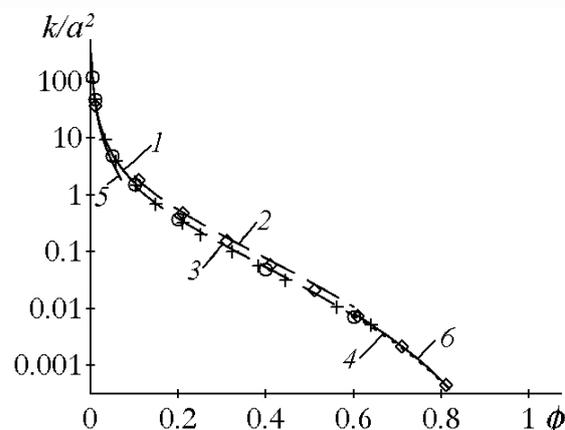


Рис. 5. Проницаемость системы квадратных стержней. Точки — численные значения: (○) — прямые численные расчеты [4–6]; (+) — работа [14]; (◇) — работа [8] для $\phi \leq 0,85$. Кривые: 1 — формула (12) для $\phi \leq 0,1$; 2 — формула (11) с коэффициентом формы $\sigma^2 = \pi/4$ для $0,1 < \phi < 0,6$; 3 — формула (13) для $0,1 < \phi < 0,6$; 4 — формула (14) для $0,6 \leq \phi < 0,8$; 5 — работа [14] для $\phi < 0,03$; 6 — работа [14] для $\phi \geq 0,6$

Заключение

В работе предложены зависимости для коэффициента проницаемости модельной пористой среды с волокнами (стержнями) квадратного сечения в широком диапазоне объемной концентрации включений. Несмотря на значительное различие формы поперечных сечений (квадрата и круга), обнаружено, что для вычисления проницаемости системы квадратных стержней могут быть использованы те же зависимости, что и для круговых цилиндров, но требуются некоторые корректирующие коэффициенты, учитывающие различия формы поперечного сечения. Полученные аппроксимационные выражения могут быть полезны в дальнейшем при решении макроскопических фильтрационных задач обтекания волокнистых пористых сред.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андерсон, Д. Вычислительная гидромеханика и теплообмен / Д. Андерсон, Дж. Таннехил, Р. Плетчер. — М. : Мир, 1990. — Т. 2. — 392 с.
2. Кирдан, П. С. Коэффициент проницаемости двумерной решетки твердых частиц в медленном поступательном потоке : магистерская диссертация по направлению подготовки магистров «Прикладная математика и информатика» / Кирдан Павел Сергеевич. — Волгоград, 2012. — 27 с.
3. Лейбензон, Л. С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде / Л. С. Лейбензон. — М. ; Л. : Гостехиздат, 1947. — 245 с.

4. Мосина, Е. В. Течение жидкости в окрестности пористой границы / Е. В. Мосина, И. В. Чернышев // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. — 2011. — Вып. 4. — № 3. — С. 999–1001.
5. Мосина, Е. В. Условие скольжения на поверхности модельной волокнистой пористой среды / Е. В. Мосина, И. В. Чернышев // Письма в ЖТФ. — 2009. — Т. 35, вып. 5. — С. 103–110.
6. Мосина, Е. В. Численное исследование течения на границе жидкость — пористая среда / Е. В. Мосина // ТОХТ. — 2010. — Т. 44, вып. 5. — С. 536–542.
7. Хаппель, Дж. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса / Дж. Хаппель, Г. Бреннер. — М.: Мир, 1976. — 631 с.
8. Analytical determination of the permeability for slow flow past periodic arrays of cylinders with different cross sections / A. C. Baytaş, D. Erdemş, H. Acar, O. Çetiner, H. Başci // J. Porous Med. — 2012. — Vol. 15. — P. 1009–1018. — DOI: <http://dx.doi.org/10.1615/JPorMedia.v15.i11.20>.
9. Drummond, J. E. Laminar viscous flow through regular arrays of parallel solid cylinders / J. E. Drummond, M. I. Tahir // Int. J. Multiphase Flow. — 1984. — Vol. 10. — P. 515–540. — DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/0301-9322\(84\)90079-X](http://dx.doi.org/10.1016/0301-9322(84)90079-X).
10. Hellou, M. Stokes flow through microstructural model of fibrous media / M. Hellou, J. Martinez, M. El Yazidi // Mech. Res. Commun. — 2004. — Vol. 31. — P. 97–103. — DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/S0093-6413\(03\)00081-8](http://dx.doi.org/10.1016/S0093-6413(03)00081-8).
11. James, D. F. Flow at the interface of a model fibrous porous medium / D. F. James, A. M. J. Davis // J. Fluid Mech. — 2001. — Vol. 426. — P. 47–72. — DOI: <http://dx.doi.org/10.1017/S0022112000002160>.
12. Tahir, M. A. Influence of fiber orientation on the transverse permeability of porous media / M. A. Tahir, H. V. Tafreshi // Phys. Fluids. — 2009. — Vol. 21. — Article ID: 083604-1–083604-5. — DOI: <http://dx.doi.org/10.1063/1.3211192>.
13. Tamayol, A. Transverse permeability of fibrous porous media / A. Tamayol, M. Bahrami // Phys. Review. — 2011. — Vol. 83 (E). — Article ID: 046314-1–046314-9. — DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2008.09.032>.
14. Wang, C. Y. Stokes flow through an array of rectangular fibers / C. Y. Wang // Int. J. Multiphase Flow. — 1996. — Vol. 22. — P. 185–194. — DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/0301-9322\(95\)00063-1](http://dx.doi.org/10.1016/0301-9322(95)00063-1).
15. Yadav, P. K. Slow motion of a porous cylindrical shell in a concentric cylindrical cavity / P. K. Yadav // Meccanica. — 2013. — Vol. 48. — P. 1607–1622. — DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s11012-012-9689-0>.

REFERENCES

1. Anderson D., Tannehill J., Pletcher R. *Vychislitel'naya gidromekhanika i teploobmen* [Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer]. Moscow, Mir Publ., 1990, vol. 2. 392 p.
2. Kirdan P.S. *Koeffitsient pronitsaemosti dvumernoy reshetki tverdykh chastits v medlennom postupatel'nom potoke: masterskaya dissertatsiya po napravleniyu podgotovki magistrrov «Prikladnaya matematika i informatika»* [The Coefficient of Permeability of Two Dimensional Array of Rigit Particles in Slow Parallel Flow: Master Thesis for Degree on Applied Mathematics and Computer Science]. Volgograd, 2012. 27 p.
3. Leybenzon L.S. *Dvizhenie prirodnykh zhidkostey i gazov v poristoy srede* [The Motion of Nature Fluid and Gas Through Porous Medium]. Moscow, Leningrad, Gostekhizdat Publ., 1947. 245 p.
4. Mosina E.V., Chernyshev I.V. Tечenie zhidkosti v okrestnosti poristoy granitsy [Fluid Flow Near the Porous Boundary]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo*, 2011, iss. 4, no. 3, pp. 999-1001.
5. Mosina E.V., Chernyshev I.V. Uslovie skolzheniya na poverkhnosti modelnoy voloknistoy poristoy sredy [Slip Condition on the Surface of a Model Fibrous Porous Medium]. *Pisma v ZhTF* [Technical Physics Letters], 2009, vol. 35, iss. 5, pp. 103-110.

6. Mosina E.V. Chislennoe issledovanie techeniya na granitse zhidkost — poristaya sreda [Numerical Study of Flow at a Liquid — Porous Medium Interface]. *ТОКhТ* [Theoretical Foundations of Chemical Engineering], 2010, vol. 44, iss. 5, pp. 536-542.

7. Happel J., Brenner H. *Gidrodinamika pri malykh chislakh Reynoldsa* [Low Reynolds Numbers Hydrodynamics]. Moscow, Mir Publ., 1976. 631 p.

8. Baytaş A.C., Erdemş D., Acar H., Çetiner O., Başci H. Analytical Determination of the Permeability for Slow Flow Past Periodic Arrays of Cylinders with Different Cross Sections. *J. Porous Med.*, 2012, vol. 15, pp. 1009-1018. DOI: <http://dx.doi.org/10.1615/JPorMedia.v15.i11.20>.

9. Drummond J.E., Tahir M.I. Laminar Viscous Flow Through Regular Arrays of Parallel Solid Cylinders. *Int. J. Multiphase Flow*, 1984, vol. 10, pp. 515-540. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/0301-9322\(84\)90079-X](http://dx.doi.org/10.1016/0301-9322(84)90079-X).

10. Hellou M., Martinez J., El Yazidi M. Stokes Flow Through Microstructural Model of Fibrous Media. *Mech. Res. Commun.*, 2004, vol. 31, pp. 97-103. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/S0093-6413\(03\)00081-8](http://dx.doi.org/10.1016/S0093-6413(03)00081-8).

11. James D.F., Davis A.M.J. Flow at the Interface of a Model Fibrous Porous Medium. *J. Fluid Mech.*, 2001, vol. 426, pp. 47-72. DOI: <http://dx.doi.org/10.1017/S0022112000002160>.

12. Tahir M.A., Tafreshi H.V. Influence of Fiber Orientation on the Transverse Permeability of Porous Media. *Phys. Fluids*, 2009, vol. 21, article ID: 083604-1–083604-5. DOI: <http://dx.doi.org/10.1063/1.3211192>.

13. Tamayol A., Bahrami M. Transverse Permeability of Fibrous Porous media. *Phys. Review*, 2011, vol. 83 (E), article ID: 046314-1–046314-9. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2008.09.032>.

14. Wang C.Y. Stokes Flow Through an Array of Rectangular Fibers. *Int. J. Multiphase Flow*, 1996, vol. 22, pp. 185-194. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/0301-9322\(95\)00063-1](http://dx.doi.org/10.1016/0301-9322(95)00063-1).

15. Yadav P.K. Slow Motion of a Porous Cylindrical Shell in a Concentric Cylindrical Cavity. *Meccanica*, 2013, vol. 48, pp. 1607-1622. DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s11012-012-9689-0>.

THE PERMEABILITY OF TWO-DIMENTIONAL POROUS MEDIUM OF SQUARE FIBERS (CELL MODEL)

Ekaterina Vladimirovna Mosina

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Lecturer,
Department of Fundamental Computer Science and Optimal Control,
Volograd State University
katefrkate@mail.ru, fiou@volsu.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Igor Viktorovich Chernyshev

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Department of Fundamental Computer Science and Optimal Control,
Volograd State University
igor_chernyshev@mail.ru, fiou@volsu.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Abstract. In the present study we have solved numerically the problem of a creeping two-dimensional viscous incompressible flow through a fibrous porous medium. The medium is modeled by a system of square fibers (rods) arranged across the flow. The viscous flow around the fibers is solved under the Stokes approximation using the cell model. The Happel boundary conditions (zero normal

velocity and tangential shear stresses) have been posted on the boundary of the fluid cell. The numerical realization is based on finite differences of the second order accuracy with successive over-relaxation method for solving a system of linear equations.

For regular lattice of square cylinders the hydrodynamic microscopic velocity fields were determined also by the direct numerical simulations. The permeability coefficient of the model porous medium is evaluated by macroscopic averaging and Darcy law assumption. It was found that the cell model with the Happel boundary conditions gives higher values of permeability in comparison with direct numerical calculations.

A comparison between these results obtained by cell model and other direct numerical calculations, empirical and analytical relationships in a wide range of the solid concentration ϕ made it possible to make the following inferences.

The permeability of a rarefied system of square cylinders can be described by an explicit expression that was obtained for circular cylinders [11] but with form factor σ^2 that reflects the difference between the square and circular cross sections of the rods

$$\frac{k}{a^2} = \frac{1}{\sigma^2} \frac{1}{8\phi} \left(\ln \frac{1}{\phi} - 1.476 + 2\phi \right), \quad \phi \leq 0.2.$$

For moderately rarefied porous media the semi-empirical Kozeny — Carman formula is appropriate. In this case corrective factor $1/\sigma^2$ gives error of the permeability more than 25%. To decrease the disagreement of the numerical values with the Kozeny — Carman formula this relation is better to use with the factor 8/9. The specified expression for permeability is

$$\frac{k}{a^2} = \frac{1}{9\phi} \left(\ln \frac{1}{\phi} - \frac{1 - \phi^2}{1 + \phi^2} \right), \quad 0.1 < \phi < 0.6.$$

At higher fiber volume fraction the Kozeny coefficient is $c_k = 6.0$, which corresponds to a large number of experimental data on the real porous beds consisting of particles of various forms [7]

$$\frac{k}{a^2} = \frac{(1 - \phi)^3}{24\phi^2}, \quad 0.6 \leq \phi < 0.8.$$

These formulas are good approximations for the permeability coefficient for the system of square rods. Obtained relations for the permeability can be useful in the solutions of the macroscopic filtration problems with fibrous porous media.

Key words: model porous medium, square fibers, Stokes approximation, Happel cell model, permeability.