Вісник Дніпровського університету. Серія Математика https://vestnmath.dnu.dp.ua
Vìsn. Dnìpro unìv., Ser. Mat. **26** (2018) p. 79–81 ISSN (Print) 2312-9557
doi:10.15421/241810 ISSN (Online) 2518-7996

УДК 517.5

О. В. Поляков*

* Днепровский национальный университет им. Олеся Гончара

Об одном свойстве нулей полиномов, наименее $(\alpha;\beta)$ - уклоняющихся от нуля в весовом пространстве L_p

Доведена властивість монотонності за параметром нулів полінома, що найменш $(\alpha;\beta)$ - відхиляється від нуля в просторі з інтегральними метриками з вагою.

Ключові слова: поліном, інтегральна метрика, $(\alpha;\beta)$-норма.

Доказано свойство монотонности по параметру нулей полинома, наименее $(\alpha;\beta)$ - уклоняющихся от нуля в пространстве с интегральными метриками с весом.

Ключевые слова: полином, интегральная метрика, $(\alpha;\beta)$-норма.

The property of monotonity of zeros of polynomials of least $(\alpha;\beta)$ deviation from zeros in the space with integral metrics with weight is proved.

Key words: polynomial, integral metric, $(\alpha;\beta)$-norm.

MSC2010: Pri 26C10, Sec 46E30, 41A50

Пусть $L_p[a;b]$ - пространство суммируемых в p-й степени на $[a;b]$ функций с соответствующей нормой $\|\cdot\|_p$. Одной из классических задач теории аппроксимации является задача нахождения полиномов наименее уклоняющихся от нуля в пространстве $L_p[a;b]$ (см, например, [1 - 2]). И тут важное место занимают свойства нулей этих многочленов.

Пусть $f \in L_1p$ и $\alpha > 0, \beta > 0$. Рассмотрим такие величины:

$$\operatorname{sgn}_{\alpha,\beta} f \quad = \; = \alpha \operatorname{sgn} f_+ - \beta \operatorname{sgn} f_-,$$

где $f_\pm(x) = \max\{\pm f(x), 0\}$. $|f(x)|_{\alpha,\beta} = f(x)\operatorname{sgn}_{\alpha,\beta} f(x)$.

Величину

$$\|f\|_{p;\alpha,\beta} = \left(\int\limits_a^b |f(x)|^p_{\alpha,\beta} dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

будем называть (α,β)-нормой или несимметричной нормой.

(α,β) нормы и связанные с ними задачи изучались во многих работах, см., в частности, [3] и список литературы к ней.

В работе [4] было установлены некоторые свойства последовательности нулей полиномма, наименее уклоняющегося от нуля в норме $\|\cdot\|_p$. Целью данной работы есть распространение результата [4] в несимметричном случае.

Пусть $T_n(x)$- алгебраический многочлен со старшим коэфициентом 1, имеющий наименьшую $(\alpha;\beta)$ - норму в пространстве $L_p[a;b]$ с весом $w(\tau;x)$.

Через $a < x_{1,p}^{(\alpha;\beta)} < x_{2,p}^{(\alpha;\beta)} < .... < x_{n,p}^{(\alpha;\beta)} < b$ будем обозначать нули полинома $T_n(x)$. В силу критерия элемента наилучшего приближения имеет место равенство

$$\int_a^b p_{n-1}(x)\cdot|T_n(x)|^{p-1}\cdot\left(\alpha^p sign\,(T_n(x))_+ - \beta^p sign\,(T_n(x))_-\right)w(\tau;x)dx = 0,$$

где $p_{n-1}(x)$- произвольный алгебраический многочлен степени не выше $n-1$.

Если $T_n(x) = \prod_{i=1}^n (x-x_i)$, то это равенство можно переписать в виде

$$\int_a^b (x-x_i)^{-1}\cdot|T_n(x)|_{\alpha\beta}^p\cdot w(\tau;x)dx = 0, \tag{1}$$

.

Имеет место

Теорема 1. *Пусть* $1 \le p < \infty$ *и* $\frac{1}{w(\tau;x)}\cdot\frac{\partial w(\tau;x)}{\partial\tau}$ *- возрастающая (убывающая) функция* $x \in (a;b)$ *для каждого* $0 \le \tau \le 1$. *Тогда* $x_{ip}^{(\alpha;\beta)}$ *строго возрастающие (убывающие) функции аргумента* τ, $1 \le i \le n$

Доказательство. Пусть $\frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial\tau}$ - возрастающая, не являющаяся константой функция. Тогда, с учетом равенств

$$\int_a^b (x-x_i)^{-1}\cdot|T_n(x)|_{\alpha\beta}^p\cdot\frac{\partial w(\tau;x)}{\partial\tau}dx =$$

$$= \frac{1}{w(\tau;x_i)}\cdot\int_a^b (x-x_i)^{-1}\cdot|T_n(x)|_{\alpha\beta}^p\cdot w(\tau;x_i)\cdot\frac{\partial w(\tau;x)}{\partial\tau}dx =$$

$$= \frac{1}{w(\tau;x_i)}\cdot\int_a^b (x-x_i)^{-1}\cdot|T_n(x)|_{\alpha\beta}^p\cdot\left(w(\tau;x_i)\cdot\frac{\partial w(\tau;x)}{\partial\tau} - \frac{\partial w(\tau;x_i)}{\partial\tau}\cdot w(\tau;x)\right)dx =$$

$$= \int_a^b |T_n(x)|_{\alpha\beta}^p\cdot\frac{\frac{1}{w(\tau;x)}\cdot\frac{\partial w(\tau;x)}{\partial\tau} - \frac{1}{w(\tau;x_i)}\cdot\frac{\partial w(\tau;x_i)}{\partial\tau}}{x-x_i}dx > 0.$$

Положим

$$F_k\left(x_1,x_2,...,x_n,\tau\right) = \int_a^b (x-x_k)^{-1}\cdot|T_n(x)|_{\alpha\beta}^p\cdot w(\tau;x)dx.$$

Если $j \ne k$, то

$$\frac{\partial F_k}{\partial x_j} =$$

$$= p\int_a^b \frac{|T_n(x)|^p}{(x-x_k)}\cdot\left(\alpha^p sign\,(T_n(x))_+ - \beta^p sign\,(T_n(x))_-\right)\frac{\partial T_n(x)}{\partial x_j}w(\tau;x)dx.$$

Поскольку $\frac{\partial T_n(x)}{\partial x_j}$ является алгебраическим многочленом степени не выше $n-1$, то в силу (1)

$$\frac{\partial F_k}{\partial x_j} = 0, j \ne k$$

Аналогично

$$\frac{\partial F_k}{\partial x_j} = \int_a^b (x-x_k)^{-1}\cdot|T_n(x)|_{\alpha\beta}^p\cdot\frac{\partial w(\tau;x)}{\partial\tau}dx.$$

Пусть $1 < p < \infty$. Тогда

$$\frac{\partial F_k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_k}\int_a^b \left|\frac{T_n(x)}{x-x_k}\right|_{\alpha\beta}^p\cdot\frac{|x-x_k|_{\alpha\beta}^p}{x-x_k}w(\tau;x)dx =$$

$$= \int_a^b \left|\frac{T_n(x)}{x-x_k}\right|_{\alpha\beta}^p \cdot (-p|x-x_k|^{p-1} \cdot (\alpha^p sign(x-x_k)_+ - \beta^p (x-x_k)_-)\,(x-x_k)+$$

$$+|x-x_k|_{\alpha\beta}^p)(x-x_k)^{-2} w(\tau;x)dx =$$

$$= (1-p)\int_a^b |T_n(x)|_{\alpha\beta}^p\,(x-x_k)^{-2} w(\tau;x)dx.$$

Отсюда вытекает, что определитель

$$\Delta_0 = det\frac{\partial(F_1,F_2,...,F_n)}{\partial(x_1,x_2,...,x_n)} = \prod_{k=1}^n \frac{\partial F_k}{\partial x_k} \neq 0$$

$$\Delta_i = det\frac{\partial(F_1,...,F_i,...,F_n)}{\partial(x_1,...,\tau,...,x_n)} = \frac{\partial F_i}{\partial \tau}\prod_{k=1,k\neq i}^n \frac{\partial F_k}{\partial x_k}$$

и

$$\frac{dx_{i,p}^{(\alpha\beta)}}{d\tau} = -\frac{\Delta_i}{\Delta_0} = \frac{\int_a^b |T_n(x)|_{\alpha\beta}^p\,(x-x_i)^{-1}\frac{\partial w(\tau;x)}{\partial\tau}dx}{(p-1)\int_a^b |T_n(x)|_{\alpha\beta}^p\,(x-x_i)^{-2} w(\tau;x)dx} > 0$$

Пусть $p=1$. Тогда

$$\frac{\partial F_k}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}(-\beta\int_a^{x_k}\left|\prod_{j=1,j\neq k}^n (x-x_j)\right|_{\alpha\beta} w(\tau;x)dx+$$

$$+\alpha\int_{x_k}^b\left|\prod_{j=1,j\neq k}^n (x-x_j)\right|_{\alpha\beta} w(\tau;x)dx) =$$

$$= (\alpha+\beta)\cdot|T_n'(x)|_{\alpha\beta}\,w(\tau;x_k)$$

и

$$\frac{dx_{i,1}^{(\alpha\beta)}}{d\tau} = -\frac{\frac{\partial F_i}{\partial\tau}}{\frac{\partial F_i}{\partial x_i}} = \frac{\int_a^b |T_n(x)|_{\alpha\beta}\,(x-x_i)^{-1}\frac{\partial w(\tau;x)}{\partial\tau}dx}{(\alpha+\beta)\cdot|T_n'(x)|_{\alpha\beta}\,w(\tau;x_k)} > 0$$

Таким образом теорема доказана.

Отметим, что в работе [4] рассматриваются и некоторое частные случаи весовой функции.

Библиографические ссылки

1. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены. - М. : Наука, 1976. — 328 с.
2. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. - М. : Наука, 1978. — 463 с.
3. *Корнейчук Н. П., Бабенко В. Ф., Лигун А. А.* Экстремальные свойства полиномов и сплайнов. -К. : Науков думка, 1992. — 304 с.
4. *Andras Kroo, Franz Peherstorfer* On the zeros of polynomials of minimal L_p-norm // Proc. Amer. Math. Soc, 1987. — Vol. 101, № 4. — P. 652–656..

Received: 01.12.2017. *Accepted:* 20.06.2018