地理学評論　81-3　121-126　2008

河川縦断形発達の拡散モデルについて

野上道男（日本大学文理学部非常勤）

河川の縦断形が凹形であることの理由として，礫径の下流への指数的減少が原因であるとの説が妥当である．野上（1981）は拡散係数を距離の指数関数とすることで，平野（1972）と同じように定常解が指数関数となるモデルを提案した．これら二つのモデルは局所的に，砂礫流量の入出力の差が地形変化となるという保存則を満足しない．流量レベルにおける質量欠損は凹形縦断形の発現と維持のための不可欠な条件である．そこで野上（1981）のモデルを次のように解釈することにした．礫径は下流へ指数関数的に減少し，拡散係数はそれに比例して増大する．一方，上流からある区間に供給される砂礫流量から摩耗による欠損を除いた分が入力となり，それと拡散係数と勾配の積で表される出力との差がその区間の標高変化（地形変化）となる．これがこの小論で提出したモデルである．したがってこのモデルの有効性は礫床河川に限定される．

キーワード：河川縦断形，モデル，拡散方程式，砂礫流量，シミュレーション

I　問題の所在

湿潤地帯の河川縦断形は上に凹形である．遷急点を挟んでいくつかのセグメントに分れる場合も山から河口まで全体としては凹形であり，また各セグメント間も凹形である．なぜそうなるのか，拡散モデルで縦断形を記述する場合のアイディアを提出する．

河川縦断形の形状は指数関数で表される（Shulits 1941）という説と，対数関数で表される（Hack 1957）などの説がある．Shulitsは河床勾配が粒径に比例するとし，日本では谷津（1954, 1955），Yatsu（1955）がこの考えをとり，その後も粒径分析と縦断（面）形についての研究が多く存在した．堆積物と地形が関係づけられていることを利点と考え，河川縦断形変化に関する拡散モデルの適用にあたって，野上（1981）もこの説を採用した．形態（地形）を数式で表現するとき，形態模写にとどまるのでは無意味であって，数式表現したことによるその後の理論的発展が可能であるかどうかが重要である．

河川縦断形，特に平衡河川の縦断形については，上述以外にも，Mackin（1948），Schumm（1977），Hack（1980），Morisawa（1985），Hey（1988），Howard（1988）など，日本では，高山（1974）など多数の総括的議論がある．

平野（1972）は地形の平衡形を拡散方程式モデルの定常解とするアイディアを提出し，平衡縦断形の問題を大きく進歩させた．すなわち物質移動の結果として地形が変化する，ここでは河川縦断形が形成される，という本来の意味の動的モデルが初めて地形の平衡形に適用されたからである．ここで動的モデルとは，その事象を微分方程式で記述するとき，高さの時間微分項が含まれる，つまり地形変化を記述している，という意味である．それまでも今でも「動的 dynamic」という用語は地形学で愛用されているが，それはシステム論的な動的平衡に関するものであるか，あるいは単に時間軸にそって何かが記述されているという程度の意味しか持っていないことが多い．前者では物質の出入りに注目しており，本来は，動的平衡とは時間と独立となる，という意味合いのはずである．動的に平衡となっている河川システムに対して外部条件の変化があると，システムは瞬時にではなく時間的にゆっくりと地形を作りながら反応する．しかしこれは日本の地形学でいう「地形発達」とほとんど同義語である．

II　拡散方程式型モデルについて

野上（1977）は歴舟川（十勝平野南部）の一連の段丘崖が上部の凸斜面と下部の凹斜面からなること，そして高位の段丘崖ほどなだらかであることに気がついた．段丘崖の成立時期が下位の段丘面の時代から知られることから，絶対年代の目盛入りで段丘崖の時系列的変化が示されていることになる．計測してみると，段丘崖斜面は上部に凸形，下部（崖基部）に凹形のセグメントを持ち，中央部の直線斜面で接合していた．その斜面形は累積正規確率分布曲線そのものであることがわかり，斜面の従順化は拡散現象としてモデル化されるというCulling（1960）や平野（1966）の拡散方程式モデルを検証し得た（野上 1980）．

斜面形の凹形セグメントは崖の基部で堆積が進行中の初期ほど大きな曲率で現れるものであり，河川に現れる凹形セグメントとは本質的に異なる．すなわち河川縦断形の凹形は斜面のように初期値問題として現れるのではなく，変化が向かう方向である平衡形として出現する．

勾配に比例するフラックスがみられるという基本的な拡散モデルだけでは，両端の高度固定という境界条件下での定常解は直線となり，河川縦断形特有の凹形は現れない．そこで平野（1966）は拡散項に移流項を追加して次式のモデルを提案した．なおこの式で左辺を0と置くと（つまり十分な時間が経過して地形変化がなくなると）定常解として距離の指数関数が得られる（平野 1972）．

$$u_t = au_{xx} + bu_x \tag{1}$$

ここで，左辺 u_t は時間 t における高さ u の変化速度であり，右辺第1項の u_{xx} は勾配 u_x の変化率つまり，ラプラシアンである．第2項は移流のある場における拡散方程式にアナロジーして，移流項と呼ぶことができる．なお a と b は正の定数である．距離は左側を上流にしているので，勾配はマイナスである．

野上（1981）は平野モデルの（上流に向かう）移流項については対応する地形プロセスがないと考え，拡散モデル式の拡散係数を距離の指数関数とすることによって，同じように定常解として指数関数を得た．

平野モデルと同じ形式で表わすと，次式のようになる．

$$u_t = d\cdot\exp(r\cdot x)u_{xx} + r\cdot d\cdot\exp(r\cdot x)u_x \tag{2}$$

ここで，$d\cdot\exp(r\cdot x)$ は下流に増大する拡散係数である．r は定数であり，d は $x=0$ つまり上流端における拡散係数である．右辺第2項と第1項の係数の比は r であるが，平野モデルでは b/a であり，これが定常解の指数関数の曲率を表す（$1/r=a/b$ は曲率半径）．

これら二つのモデルを比較すると，両者とも砂礫流量（フラックス）は勾配に比例している（拡散モデル）が，上流からのフラックスよりも下流へのフラックスの方が大きくなるように（つまり侵食が起きるように），それぞれ別のプロセスで強制していることがわかる．

言うまでもなく，空間的広がりのある事象の時間的変化は偏微分方程式で記述される．ここでは一次元の河川縦断形の発達を記述する拡散方程式型モデルについて議論する．そしてその要点は凹形縦断形の発現理由に関するアイディアである．

移流項を持つ平野（1966）モデルでも野上（1981）のモデルでも，その定常解は距離の指数関数である．両モデルとも，局所的な物質輸送量の欠損が生じている．平野モデルでは移流項，野上モデルでは距離の指数関数で表わされる拡散係数が原因である．この欠損は凹形縦断形成立のための必要条件であるが，細粒生成物の扱いを考慮しないと保存則は成立しない．

III　河川モデルにおける細粒物質の扱い

河川に供給される土砂には大量の細粒物質が含まれており（森山・浅井 1980），また河川でも砂礫の破砕摩耗，基盤岩の研磨によって細粒物質が生じる．河川が運搬する物質をここでは単純化して，浮流で運ばれる細粒物質と掃流によって運ばれる礫質物質とに分離する．

細粒物質は浮流して河口付近で堆積するか，河川の氾濫で三角州の堆積物となる．一方，研磨を受け次第に細粒化して掃流される礫質堆積物は地形（この場合凹形の縦断形）を作りながら下流に運ばれる．この小論ではこれらの地形学的知見を拡散方程式モデルに組み込むアイディアについて考案している．

ロスアンジェルス試験機による河床礫の摩耗実験（森脇ほか 1985）によれば，礫は2分割を繰り返すような破砕によって細粒化するのではなく，大部分は礫の稜角が擦り取られるような摩耗によって細粒化が進行し，しかも生成物の粒径は本体の礫の円摩が進むにつれて細粒化し，円摩礫からはシルトサイズ以下のものしか生産されない．

試験機の回転ドラムの中で起きていることは現実の河床で起こっている現象に近いものと想像すると，ドラムの回転数に円周を乗じた値を距離に対比させ，実際の河川では礫の輸送距離に応じて摩耗欠損が生じていると考えることができる．

河床の礫は摩耗を受け，礫径を減じながら下流に運ばれる．このことは実際に観察できることではないが，下流に向かって礫が円くなること，礫が小さくなる（中山 1954）ことなどから，そのように想像される．このとき摩耗によって生じる細粒物質や斜面から供給された細粒物質は，それに見合う勾配が河川縦断形に存在しない場合には（たとえば扇状地河川のまま）海へ注ぐが，扇状地の勾配よりも不連続に緩い三角州を形成する場合もある（谷津 1954，1955；Yatsu 1955）．

以上の検討から，(2) 式は礫床河川区間に当てはまるモデルであると再定義する．細粒物質とその輸送についてはこのモデルの適用外とする．

IV　シミュレーションのための離散方程式モデル

ある区間への流入量のうち，摩耗で失われる量があり，その残量と次の区間への流出量との差が保存則に従ってその区間の河床高の変化高となる．このモデルで，摩耗欠損量がつねに一定であるとすると，移流項を持つ平野（1966）のモデルと同等となる．しかし，ここでは次のように指数関数的に進行する礫径の減少に見合う摩耗欠損が生じるとする．

礫流量は拡散係数と勾配の積で表されるが（要するに拡散方程式モデル），ある区間への流入礫流量 Qin のうち，$Qin(1-\exp(-r\cdot x))$ が摩耗による細粒物質となり欠損するとし，流出礫流量を $Qout$ とすると，河床高の変化 $\varDelta u$ は次のように表わされる．

$$\varDelta u=\exp(-r\cdot x)Qin-Qout \tag{3}$$

これがここで提案する，河川縦断形の変化を記述するモデルである．なお地形発達の数値シミュレーションのためのモデル化であるので，ここでは離散式で記述している．

(3) 式から明らかのように，$r=0$ は摩耗がない場合であり，土石流や半乾燥地域の河川に当てはまるであろう．平衡が出現しているならばその縦断形は直線となる．一方，正の値である r が大きいほど縦断形の凹形度は強くなる．熱帯多雨帯の河川などがこの特徴を備えている（野上 2005）．

拡散係数の下流への増加は粒径変化による（(2) 式），それによって平衡形が指数関数となるという解釈の後半部分を変更して，(3) 式のモデルでは，礫径の減少に応じて礫流量に欠損が生じるというアイディアを取り入れている．実際のシミュレーションプログラムでは，細粒部分を河口付近や三角州まで運び堆積させる別の関数を取り入れている．つま

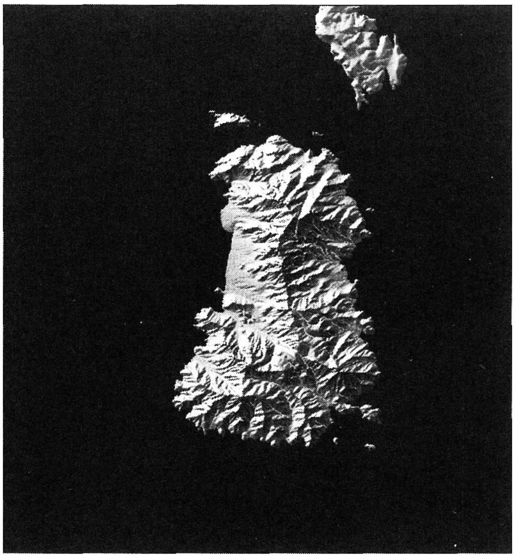

図 1　現在の地形
Fig. 1　Initial landform

り局所的には (3) 式では保存側は成り立たないが，河口までを含めた流域全体では保存則が保たれている．

シミュレーションプログラムの中では，このモデル（(3) 式）によってフラックス（礫流量）のレベルで演算を行っている．さらに付け加えると，斜面についてはCulling（1960）と平野（1966）に従う拡散項だけのモデルを採用し，河川についてはこのモデル（(3) 式）を河川網に適用し，海岸線付近については海食崖後退モデルと波蝕限界までの侵食・堆積モデルを組み合わせて，筆者は海面変化・地殻運動・気候変化など外部独立条件の変化に反応して地形が変化する「地形発達シミュレータ」を構築している．これによって，図1のような原（現）地形から約12万年後の地形（図2）を計算だけで得ることができた．

(3) 式のモデルには河川礫流量の区間収支の項があり，モデルの検証を現実河川の実測データで行うことはほとんど不可能であろう．しかしこの河川モデルを取り入れて行ったシミュレーションの結果

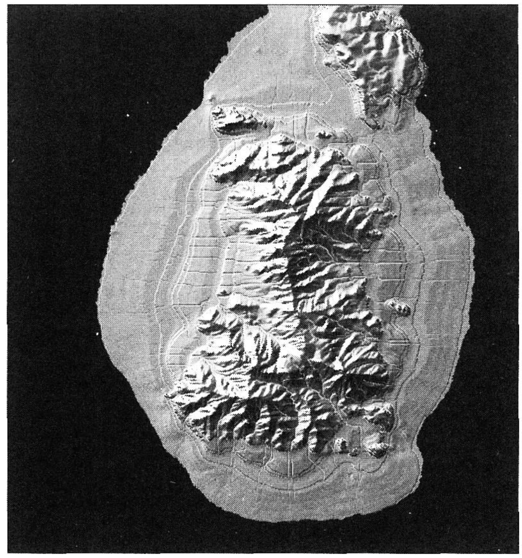

図 2　シミュレーションで得られた12万年後の地形
Fig. 2　Simulated landform 120,000 years later using this model combined with slope and coastal models

（図2）が妥当なものであれば，そのような限定つきでこのモデルの妥当性も主張できる，と考える．なお「地形発達シミュレータ」については別報としたい．

（投稿　2007年6月29日）
（受理　2008年1月12日）

文　献

高山茂美 1974．河川地形．共立出版．
中山正民 1954．多摩川における礫の円摩度について．地理学評論 27：497–506．
野上道男 1977．比較形態学方法による段丘崖斜面発達の研究．地理学評論 50：32–44．
野上道男 1980．段丘崖の斜面発達における従順化係数．地理学評論 53：636–645．
野上道男 1981．河川縦断面形発達過程に関する非定数係数拡散モデル．地理学評論 54：364–368．
野上道男 2005．地形学におけるシミュレーション．地理学評論 78：133–146．
平野昌繁 1966．斜面発達とくに断層崖発達に関する数学的モデル．地理学評論 39：324–336．
平野昌繁 1972．平衡形の理論．地理学評論 45：703–715．

森山昭雄・浅井道広 1980. 矢作川河床堆積物と供給岩石の造岩鉱物との粒度組成関係. 地理学評論 53: 557–573.

森脇　広・野上道男・初見祐一・井上芳郎 1985. 回転ドラムによる砕屑物の破砕・摩耗実験――特に粒度組成の時間変化について――. 地理学評論 58A: 385–390.

谷津栄寿 1954, 1955. 平衡河川の縦断面形について. 資源研彙報 33: 15–24, 34: 14–21, 35: 1–6.

Culling, W. E. H. 1960. Analytical theory of erosion. *Journal of Geology* 68: 336–344.

Hack, J. T. 1957. Studies of longitudinal stream profiles in Virginia and Maryland. *US Geological Survey Professional Paper* 294–B.

Hack, J. T. 1980. Dynamic equilibrium and landscape evolution. In *Theories of landform development.*, ed. W. N. Melhorn and R. C. Flemal, 87–102. London: George Allen & Unwin.

Hey, R. D. 1988. Mathematical models of channel morphology. In *Modelling geomorphological systems*, ed. M. G. Anderson, 99–125. Chichester: John Wiley & Sons.

Howard, A. D. 1988. Equilibrium models in geomorphology. In *Modelling geomorphological systems*, ed. M. G. Anderson, 49–72. Chichester: John Wiley & Sons.

Mackin, J. H. 1948. *Concept of the graded rivers. Geological Society of America, Bulletin* 59: 463–512.

Morisawa, M. 1985. *Rivers: Form and process*. London: Longman.

Shulits, S. 1941. Rational equation of river bed profile. Transactions, American. Geophysical Union, 622–31. In *River Morphology*, ed. S. A. Schumm, 1972: 201–210. Dowden: Hutchinson and Ross, Inc.

Schumm, S. 1977. *The fluvial system*. Chichester: John Wiley & Sons.

Yatsu, E. 1955. On the longitudinal profile of the graded river. In *River Morphology*, ed. S. A. Schumm, 1972: 211–219. Dowden: Hutchinson and Ross, Inc.

Geographical Review of Japan **81**–3 121–126 2008

A Concept Based on the Diffusion Equation Model of Concave River Profile Development

NOGAMI Michio

(Department of Geography, College of Humanities and Sciences, Nihon University)

A diffusion equation developed by this author:

$$\partial u/\partial t = \partial/\partial x\{d\exp(rx)\partial u/\partial x\} \quad \cdots\cdots \text{Eq. 1}$$

is able to simulate concave river profile development. The diffusion coefficient $d\ \exp(rx)$ is given by an exponential of distance x and its basis is attributable to a downstream exponential decrease in gravel size. The model gives an exponential curve as the equilibrium steady-state profile.

In this paper, the author develops a concept based on the model which gives the same equilibrium profile. The model is described in discrete quantities for simulation programs:

$$\Delta u = \exp(-rx)Qin - Qout \quad \cdots\cdots \text{Eq. 2}$$

where Δu is the change in river bed height, and influx Qin is the product of the upstream gradient by the diffusion coefficient $d\ exp(rx)$ as above, and $Qout$ is outflux in the same manner. Here, the flux decrease of gravel is assumed to be

$$Qin(1-\exp(-rx))$$

at distance x upstream and r is constant.

The model (Eq. 2) shows deviation from the conservation law, but the grain size of flux loss products is so fine that it can be moved directly to the river mouth or the delta as suspended load. Therefore the balance between erosion and deposition is conserved for the whole drainage basin. The model (Eq. 2) has two advantages : the model is described faithfully based on geomorphologic evidence ; and in the operation of numerical simulation, the algorithm of the model is tolerant against running into divergent or runaway states.

Key words: river profile, model, diffusion equation, sediment flux, simulation