Вісник Дніпровського університету. Серія Математика https://vestnmath.dnu.dp.ua
Vìsn. Dnìpro unìv., Ser. Mat. **26** (2018) p. 56–61 ISSN (Print) 2312-9557
doi:10.15421/241807 ISSN (Online) 2518-7996

УДК 517.5

В. П. Моторний

Дніпровський національний униіверситет ім. Олеся Гончара

Про наближення у середньому функції та її похідних

Розглянуто деякі властивості інтегровних на сегменті функцій. Отримано оцінки для наближень функції та її похідних.

Ключові слова: модуль неперервності, інтеграл, функція, похідна.

Рассмотрены некоторые свойства интегрируемых на сегменте функций. Получены оценки для приближений функции и её производных.

Ключевые слова: модуль непрерывности, интеграл, функция, производная.

In this article we consider some properties of the integrable on the segment functions. Estimates for approximation of function and its derivatives are obtained.

Key words: modulus of continuity, integral, function, derivative.

Позначимо через $L^p_{[a;b]},\ p \geq 1$ простір функцій f, що задані і вимірні на сегменті $[a;b]$ з кінченою нормою $\|f\|_{L^p_{[a;b]}} = \left\{ \int_a^b |f(x)|^p dx \right\}^{1/p}$. Нехай $\omega(f;t)_p-$ інтегральний модуль неперервності функкії $f \in L^p_{[a;b]}$.

Для довільного модуля неперервності $\omega(t)$ позначимо через H^ω_p клас функцій $f \in L^p_{[-1;1]}$, для яких при всіх $t \in (0,1)$ виконується нерівність $\omega(f;t)_p \leq \omega(t)$. Через $W^r H^\omega_p (1 \leq p < \infty,\ r-$ натурального число) позначимо клас функцій f, що мають на сегменті $[-1;1]$ абсолютно неперервну похідну $f^{(r-1)}$, таку, що $f^{(r)} \in H^\omega_p$. У випадку коли $\omega(t) = t^\alpha,\ 0 < \alpha \leq 1$, клас $W^r H^\omega_p$ будемо позначати через $H^{r+\alpha}_p$.

Покладемо $g(x,n) = \sqrt{1-x^2} + 1/n, x \in [-1;1], n-$ натуральне.

У 1962 році Р.М. Тригуб [1] довів наступну теорему.

Теорема А. *Якщо функція f має на $[-1;1]$ r неперервних похідних і $\omega(f^{(r)};t)-$ модуль неперервності $f^{(r)}$, то для кожного n існує такий алгебраїчний многочлен $P_n(x)$ степеня не вище n, що для усіх $x \in [-1;1]$ і усіх $k = 0,1,...,r$ справедлива оцінка*

$$|f^{(k)}(x) - P_n^{(k)}(x) \leq C_r \left(g(x,n)/n\right)^{r-k} \omega\left(f^{(r)}; g(x,n)/n\right), \tag{1}$$

де C_r залежить від r.

Тут і далі через C_r будемо позначати додатні величини, що залежать від r, взагалі кажучі, різні в різних місцях, а через C будемо позначати різні абсолютні додатні константи, С.А. Теляковський [2] доповнив теорему А показавши, що якщо для функції f, яка має на $[-1;1]$ r неперервних похідних і $\omega(f^{(r)};t)-$ модуль неперервності $f^{(r)}$, існує алгебраїчний многочлен $P_n(x)$ степеня не вище n, такий, що виконується нерівність (1) при $k=0$, то справедлива оцінка (1) дляі усіх $k=1,1,...,r$.

Задача про сумісне наближення функції таі ії похідних алгебраїчними многочленами в просторі $f\in L^p_{[-1;1]}$, $p\geq 1$ розв'язана в роботі [3] для класів Лебідя-Потапова і в роботі [4] для класів $H^{r+\alpha}_p$. Класи Лебідя-Потапова введены в роботах [5] , [6]. В даній роботі задача про сумісне наближення функції та її похідних алгебраїчними многочленами в просторі $L^p_{[-1;1]}$, $p\geq 1$ розглянута для класів $W^rH^\omega_p$. Основний результат деної роботи базується на наступному твердженні

Теорема В [7]. *Нехай функція $f(x)\in W^rH^\omega_p$. Тоді для кожного $n\geq r$ знайдеться алгебраїчний многочлен $P_n(x)$ степеня не вище n, що задовольняє нерівності*

$$\left\|\frac{f(x)-P_n(x)}{\omega\left(g(x,n)/n\right)g^r(x,n))}\right\|_{L^p_{[-1;1]}}\leq C_r\frac{\ln^{\frac{1}{p}}n}{n^r},$$

де C_r залежить від r.

У випадку $\omega(t)=t^\alpha$, цій результат одержено в [8], (див., також [9]).

Головним результатом данної роботи є наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай функція $f(x)\in W^rH^\omega_p$ $(1\leq p<\infty)$. Тоді для кожного $n\geq r$ знайдеться алгебраїчний многочлен $P_{r,n}(f;x)$ степеня не вище n, такий, що для усіх $k=0,1,...,r$ виконуються нерівності*

$$\left\|\frac{f^{(k)}(x)-P^{(k)}_{r,n}(f;x)}{\omega\left(g(x,n)/n\right)g^{r-k}(x,n))}\right\|_{L^p_{[-1;1]}}\leq C_r\frac{\ln^{\frac{1}{p}}n}{n^{r-k}},$$

де C_r залежить від r.

Доведення теореми 1 випливає із наступних допоміжних тверджень.

Лема 1. (див. [10], теорема 4). *Для будь-якого алгебрачного многочлена $P_n(x)$ степеня не вище n виконується нерівнсть 1*

$$\left\|\frac{P^{(k)}_n(x)}{g^{r-k}(x,n)\omega(g(x,n)/n)}\right\|_{L^p_{[-1;]}}\leq C_rn^k\left\|\frac{P_n(x)}{g^r(x,n)\omega(g(x,n)/n)}\right\|_{L^p_{[-1;1]}}, \qquad (2)$$

де $r-$ довільне число, $\omega(t)-$ довільний модуь неперервності.

Лема 2. (див. [10], теорема 3). *Для будь-якого алгебрачного многочлена $P_n(x)$, степеня не вище n, і будь-яких p,p', що задовільнюють нерівності $1\leq p\leq p'\leq\infty$, виконується нерівність*

$$\left\|\frac{P_n(x)}{\delta^{r+1/p'}(x,n)\omega(\delta(x,n)/n)}\right\|_{L^{p'}_{[a;b]}}\leq$$

$$\leq C_r \left(\frac{2n}{b-a}\right)^{1/p-1/p'} \left\| \frac{P_n(x)\delta^{-1/p}(x,n)}{\delta^r(x,n)\omega(\delta(x,n)/n)} \right\|_{L^p_{[a;b]}}, \tag{3}$$

де $r-$ *довільне число,* $\delta(x,n) = \frac{2\sqrt{(b-x)(x-a)}}{b-a} + \frac{1}{n}, \ \ x \in (a;b)$, $\omega(t)-$ *довільний модуь неперервності.*

Покладемо в (3) $a = a_n = -1 + 1/n^2, \ \ b = b_n = 1 - 1/n^2, \ \ p' = \infty$, і замість r візьмемо $r-1$. Тоді $\delta(x,n) = \frac{\sqrt{(1-1/n^2)^2 - x^2}}{1-1/n^2} + \frac{1}{n}$, якщо $|x| \leq 1 - 1/n^2$. Оскільки мають місце нерівністі $0,4g(x,n) \leq \delta(x,n) \leq g(x,n)$, якщо $|x| \leq 1-1/n^2$, то із нерівності (3) випливає

$$\frac{|P_n(x)|}{g^{r-1}(x,n)\omega(g(x,n)/n)} \leq C_r n^{1/p} \left\| \frac{P_n(x) g^{1-1/p}(x,n)}{g^r(x,n)\omega(g(x,n)/n)} \right\|_{L^p_{[a_n;b_n]}}. \tag{4}$$

Завдяки нерівностям $g(x,n) \leq 2\sqrt{1-x^2}$, якщо $|x| \leq 1-1/n^2$, і $1/g(x,n) < n$, якщо $x \in (-1;1)$, маємо

$$\frac{|P_n(x)|}{g^{r-1}(x,n)\omega(g(x,n)/n)} \leq C_r n^{2/p} \left\| \frac{P_n(x)\sqrt{1-x^2}}{g^r(x,n)\omega(g(x,n)/n)} \right\|_{L^p_{[a_n;b_n]}}. \tag{5}$$

Позначемо через $M(\omega, r)$ норму у правій частині нерівності (5) Із означення величини $M(\omega, r)$ і нерівності (5), для $x \in [-1+1/n^2; 1-1/n^2]$, одержемо

$$\frac{|P_n(x)|}{g^{r-1}(x,n)\omega(g(x,n)/n)} \leq C_r n^{2/p} M(\omega, r). \tag{6}$$

Із леми Г.К. Лебідя (див. [10], стор. 572) випливая справедливість нерівності (6) для усіх $x \in [-1;1]$.

Лема 3 *Для будь-якого алгебрачного многочлена* $P_n(x)$ *степеня не вище* n *виконуеться нерівність*

$$\left\| \frac{P_n(x) g^{1-r}(x,n)}{\omega(g(x,n)/n} \right\|_{L^p_{-1;1}} . \leq C_r \left\| \frac{P_n(x) g^{-r}(x,n)\sqrt{1-x^2}}{\omega((g(x,n)/n)} \right\|_{L^p_{-1;1}}, \tag{7}$$

де $r-$ *довільне число,* $\omega(t)-$ *довільний модуь неперервності.*

Доведення. Оскільки для $x \in [a_n; b_n]$, де $a_n = -1 + 1/n^2, b_n = 1 - 1/n^2$ виконується нерівність $\sqrt{1-x^2} + 1/n \leq 2\sqrt{1-x^2}$ то

$$\left\| \frac{P_n(x) g^{1-r}(x,n)}{\omega(g(x,n)/n} \right\|_{L^p_{[a_n;b_n]}} \leq 2^{1/p} \left\| \frac{P_n(x)\sqrt{1-x^2}}{g^r(x;n)\omega(g(x,n)/n)} \right\|_{L^p_{[a_n;b_n]}} \leq 2^{1/p} M(\omega, r).$$

Щоб оцінити інтеграл, що відповідає сегментам $[-1;-1+1/n^2], [1;1-n^2]$, використуемо нерівність (6).

$$\int_{1-1/n^2}^{1}\left|\frac{P_n(x)}{g^{r-1}(x,n)\omega(g(x,n)/n)}\right|^p dt \le$$

$$\le C_r n^2 M^p(\omega,r)\int_{1-1/n^2}^{1} dt = C_r M^p(\omega,r) \qquad (8)$$

Аналогічно можна оцінити інтеграл по сегменту $[-1;-1+1/n^2]$.

Лема 4. *Для будь-якого модуля неперервності $\omega(t)$, будь-якого додатнього числа r і будь-яких $u,y\in[-\pi;\pi]$ має місце нерівність*

$$\phi(y,u)\equiv\left|\frac{\sin(y+u)}{(|\sin y|+1/n)^r\omega(|\sin y|/n+1/n^2)}\right|^p|\sin y|\le$$

$$\le C_r\left|\frac{(|\sin(y+u)|+1/n)^{1-r}}{\omega(|\sin(y+u)|/n+1/n^2)}\right|^p(1+n|u|)^{(r+1)p}|\sin(y+u)|. \qquad (9)$$

Наступна лема узагальнює лему 1 роботи [5].

Лема 5. *Нехай похідна $f'(x)$ абсолютно неперервної функції належить $L^p_{[-1;1]}$ і виконується нерівність*

$$\left\|\frac{f'(x)}{(\sqrt{1-x^2}+1/n)^{r-1}\omega(\sqrt{1-x^2}/n+1/n^2)}\right\|_{L^p_{[-1;1]}}\le\psi(n). \qquad (10)$$

Тоді існує алгебрачний многочлен $P_n(x)$ степеня не вище $(n-1)(k-2)$ такий що виконується нерівнсть

$$\left\|\frac{f(x)-P_n(x)}{(\sqrt{1-x^2}+1/n)^{r}\omega(\sqrt{1-x^2}/n+1/n^2)}\right\|_{L^p_{[-1;1]}}\le A_r\frac{\psi(n)}{n}, \qquad (11)$$

де $r\ge 0$, а величина A_r не залежить від f і n.

Доведення. Нехай $K(t)=\frac{1}{\gamma_n}\left\{\frac{\sin nt/2}{n\sin t/2}\right\}^{2k+4}$, де γ_n вибрано так, що $\int_{-\pi}^{\pi}K(t)dt=1$. Відомо, що $K(t)-$ є тригонометричним поліномом степеня $(r+2)(n-1)$ і для нього виконується умова:

$$\int_{-\pi}^{\pi}|t|^\alpha K(t)dt\le\frac{C}{n^\alpha},\ \ 0<\alpha<2r+3. \qquad (12)$$

Покладемо $P_n(f,x)=\int_{-\pi}^{\pi}f(\cos(y+t))K(t)dt$, де $x=\cos y$. Завдяки оцінки (9) функції $\phi(y,u)$ і умовам (10), (12) одержемо (11).

В лемі 6 розглянемо формулу для похідної полінома $P_n(f,x)$.

Лема 6. *Якщо функція $f(x)\in W^rH^\omega_p$ $(1\le p<\infty)$, то*

$$\frac{d}{dx}P_n(f,x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\int_{-\pi}^{\pi}f^{(\prime)}(\cos(y+t))\sin(y+t)K(t)dt, \qquad (13)$$

де $x = \cos y$.

Лема 7. *Нехай похідна* $f'(x)$ *абсолютно неперервної функції належить* $L^p_{[-1;1]}(1 \le p < \infty)$ *і виконується нерівність* (10). *Тоді для алгебраїчного многочлена* $P_n(f,x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos(y+t))K(t)dt$, *де* $x = \cos y$, *має місце нерівність*

$$\left\| \frac{P_n^{(k)}(f,x)}{(\sqrt{1-x^2}+1/n)^{r-k}\omega(\sqrt{1-x^2}/n+1/n^2)} \right\|_{L^p_{[-1;1]}} \le C_r \frac{\psi(n)}{n^{r-k}}. \tag{14}$$

Теорему 1 будемо доводити методом математичної індукції. Нехай $r = 1$, функція $f(x) \in W^1 H_p^\omega$ $(1 \le p < \infty)$, алгебраїчний многочлен $Q_n(f;x)$ степеня не вище n, існування якого доведено у теоремі B такий, що задовольняє нерівніть

$$\left\| \frac{f'(x) - Q_n'(f;x)}{\omega\left(g(x,n)/n\right)} \right\|_p \le C\psi(n),$$

де $\psi(n) = C \ln^{\frac{1}{p}} n$.

Отже для функції $f(x) - Q_n(f;x)$ виконуються умова (10). Тоді завдяки леми 5 існує алгебрачний многочлен $P_n(f - Q_n;x)$ степеня не вище $(n-1)(k-2)$ такий що виконується нерівнсть

$$\left\| \frac{f(x) - Q_n(f;x) - P_n(f-Q_n;x)}{(\sqrt{1-x^2}+1/n)\omega(\sqrt{1-x^2}/n+1/n^2)} \right\|_{L^p_{[-1;1]}} \le A_1 \frac{\psi(n)}{n}, \tag{15}$$

де величина A_1 не залежить від f і n. Покажемо, що для многочлена $P_{1,n}(x) = Q_n(f;x) + P_n(f-Q_n;x)$ виконується твердження теореми 1. Ухилення многочлена $P_{1,n}(x)$ від функції f випливає з нерівності (15), а ухилення многочлена $P_{1,n}'(x)(x)$ від похідної f' випливає з леми 7 за умовою, що $r = k = 1$:

$$\left\| \frac{f'(x) - P_{r,n}'(f;x)}{\omega\left(g(x,n)/n\right)} \right\|_p \le \left\| \frac{f'(x) - Q_n'(f;x)}{\omega\left(g(x,n)/n\right)} \right\|_p +$$

$$+ \left\| \frac{P_n'(f-Q_n;x)}{\omega\left(g(x,n)/n\right)} \right\|_p \le C_1 \ln^{\frac{1}{p}} n.$$

Нехай теорема 1 має місце для натурального числа $r \ge 1$ і функція $f(x) \in W^{1+r}H_p^\omega$. Тоді $f'(x) \in W^r H_p^\omega$ і за припущенням існує алгебраїчний многочлен $P_{r,n}(f',x)$ степеня не вище n, такий, що для усіх $k = 0,1,...,r$ задовольняє нерівності

$$\left\| \frac{f^{(k+1)}(x) - P_{r,n}^{(k)}(f';x)}{\omega\left(g(x,n)/n\right)g^{r-k}(x,n))} \right\|_p \le C_r \frac{\ln^{\frac{1}{p}} n}{n^{r-k}}. \tag{16}$$

Із нерівності (16) для $k = 0$ випливає виконання умови (10) для функції $f(x) - \int_0^x P_{r,n}(f';t)dt$:

$$\left\| \frac{f'(x) - P_{r,n}(f';x)}{\omega\left(g(x,n)/n\right)g^{r}(x,n))} \right\|_p \le C_r \frac{\ln^{\frac{1}{p}} n}{n^{r}}.$$

Тоді завдяки леми 5 існує алгебрачний многочлен $P_n(x)$ степеня не вище $(n-1)(k-2)$ такий що виконується нерівнсть

$$\left\| \frac{f(x) - \int_0^x P_{r,n}(f';t)dt - P_n(x)}{(\sqrt{1-x^2}+1/n)^{r+1}\omega(\sqrt{1-x^2}/n+1/n^2)} \right\|_{L^p_{[-1;1]}} \leq A_1 \frac{\ln^{\frac{1}{p}} n}{n^{r+1}}, \tag{17}$$

де величина A_r не залежить від f і n. Покажемо, що для многочлена $P_{r+1,n}(f,x) = \int_0^x P_{r,n}(f';t)dt + P_n(x)$ виконується твердження теореми 1. Ухилення многочлена $P_{r+1,n}(f,x)$ від функції f випливає з нерівності (17), а ухилення многочлена $P^{(k)}_{r+1,n}(f,x)$ від похідної $f^{(k)}(x)$ випливає з наступних нерівностей і леми 7:

$$\left\| \frac{f^{(k)}(x) - P^{(k)}_{r+1,n}(f;x)}{\omega\left(g(x,n)/n\right) g^{r+1-k}(x;n)} \right\|_p = \left\| \frac{f^{(k)}(x) - P^{(k-1)}_{r,n}(f';x) - P^{(k)}_n(x)}{\omega\left(g(x,n)/n\right) g^{r+1-k}(x;n)} \right\|_p \leq$$

$$\leq \left\| \frac{f^{(k)}(x) - P^{(k-1)}_{r,n}(f';x)}{\omega\left(g(x,n)/n)\right) g^{r+1-k}(x;n)} \right\|_p + \left\| \frac{P^{(k)}_n(x) g^{k-r-1}(x;n)}{\omega\left(g(x,n)/n\right)} \right\|_p \leq C_r \frac{\ln^{\frac{1}{p}} n}{n^{r+1-k}}.$$

Бібліографічні посилання

1. *Т*ригуб Р.М. Приближение функций многочленами с целыми коэффициентами. / Р.М. Тригуб //Изв. АН СССР, серия матем., 26. — 1962. С. 261–280.
2. *Т*еляковський С.А. Две теоремы о приближении функций алгебраическими многочленами. / С.А. Теляковський //Матем. сборник, 70, № 2. С. 252 – 265.
3. *Ковальчук Р.Н., Философ Л.И.* Совместное приближение функции и её производных в метрике L_p|Текст| /Р.Н. Ковальчук, Л.И. Философ // В зб.: Исслед. по теории приближ. функций и их прил. К. 1978. – С. 89–104.
4. *Ходак Л. Б.* О совместном приближении функций и их производных алгебраическими многочленами в метрике $L_p, 1 \leq p < \infty$|Текст| / Л.Б. Ходак // В зб.: Исслед. по совр. проб. сумм. и прибл. функций и их прил. Днепропетровск, 1979. – С. 27–31.
5. *П*отапов М.К. О теоремах типа Джексона в метрике L_p. / М.К. Потапов // Докл. АН СССР, 111, №6. — 1956. С. 1185–1188.
6. *Л*ебедь Г.К. Некоторые вопросы приближения функций одной переменной алгебраическими полиномами. / Г.К. Лебедь // Докл. АН СССР, 118, №2. — 1958. С. 239–242.
7. *М*оторный В.П. Наближення функцій алгебраїчними многочленами в середньому|Текст| /В.П. Моторный, М.С. Клименко //Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Сер. Математика – 2012, Вип.17. С. 106 - 117.
8. *М*оторный В.П. Некоторые вопросы приближения функций алгебраическими полиномами в интегральной метрике.. /В.П. Моторный // Докл. АН СССР, серия матем., 172. № 3. (1967. С. 537–540.
9. *Моторный В.П.* Приближение функций алгебраическими полиномами в метрике L_p|Текст| /В.П. Моторный // Изв. АН СССР, Сер. матем. – 1971.–Т. 35, №4. – С. 874–899.
10. *Л*ебедь Г.К. Неравенства для многочленов и их производных. / Г.К. Лебедь // Докл. АН СССР, 117, №4. — 1957. С. 570–572.

Received: 15.05.2018. *Accepted:* 20.06.2018